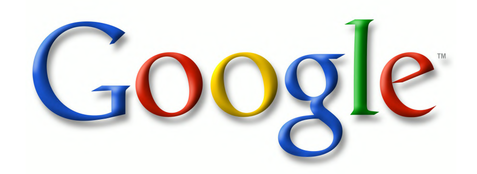


Anwendung der Graphostatik im Maschinenbau

Von

Alfred Wachtel



Dr. Max Jänecke, Verlagsbuchhandlung, Leipzig




TJ
235
.W11



Anwendung

der

Graphostatik im Maschinenbau

mit besonderer Berücksichtigung

der statisch bestimmten Achsen und Wellen

Elementares Lehrbuch

für technische Unterrichtsanstalten, zum Selbststudium
und zum Gebrauch in der Praxis

Bearbeitet

von

Alfred Wachtel

Ingenieur

Mit 194 Abbildungen



Hannover

Dr. Max Jänecke, Verlagsbuchhandlung

1906

Piererache Hofbuchdruckerei Stephan Geibel & Co. in Altenburg.

Vorwort.

Der Vorteil der zeichnerischen Lösung einer ganzen Reihe von Ingenieuraufgaben gegenüber der analytischen Behandlung wird in Fachkreisen allgemein anerkannt. Diese Tatsache findet ihre Erklärung in der ungemeinen Übersicht, welche die meist nach den einfachsten Grundregeln entworfene Zeichnung der Lösung einer Aufgabe gibt.

Im vorliegenden Buch wird nun der Versuch gemacht, den Studierenden, von dem nur die Kenntnis der Hauptsätze aus der Mechanik und Festigkeitslehre vorausgesetzt wird, möglichst schnell mit den in knappste Form gekleideten Fundamentalregeln der Graphostatik vertraut zu machen, um hieran anschliefsend die Anleitung zur Lösung recht vieler, verschiedenartiger, praktischer Aufgaben zu geben. Diesem Hauptzweck des Buches entsprechend ist besonders auf den Maschinenbau Rücksicht genommen und in den letzten Paragraphen auf die graphische Berechnung der Achsen und Wellen näher eingegangen, bei welchen auch in einigen charakteristischen Beispielen gezeigt wird, wie die belastenden Kräfte und die Ebenen, in denen sie wirken, gefunden werden.

Von der Behandlung statisch unbestimmter Aufgaben ist abgesehen worden und der Stoff auf das Wichtigste beschränkt, um das Buch einem gröfseren Kreise zugänglich zu machen. Es wird sich daher nicht nur als Leitfaden für den Unterricht in der Graphostatik an technischen Lehranstalten eignen, sondern auch als Nachschlagebuch für den in der Praxis stehenden Techniker.

Bei der Auswahl der zahlreichen Aufgaben und der Behandlung des Stoffes kamen dem Verfasser seine langjährige Tätigkeit als praktischer Ingenieur und Lehrer an einer höheren technischen Anstalt zugute, so dafs er hofft, ein Werkchen bearbeitet zu haben, dessen Studium zur recht häufigen Anwendung der graphischen Statik auf dem Konstruktionsbureau anregen möge.

A. Wachtel.

Inhaltsverzeichnis.

Erstes Kapitel.

Zusammensetzung und Zerlegung von Kräften in der Ebene.

Zweites Kapitel.

Drittes Kapitel.

Viertes Kapitel.

Die statischen Momente der Kräfte.

Fünftes Kapitel.

Das ebene Fachwerk.

Sechstes Kapitel.

Die statisch bestimmten Achsen und Wellen.

Einleitung.

Sind die in verschiedenen Punkten eines Körpers angreifenden äufseren Kräfte aufser stande, die inneren Molekularkräfte zu überwinden, so dafs der Körper im Ruhezustande bleibt, so halten sich alle Kräfte, äufsere sowohl als auch innere, das Gleichgewicht. Alle diesbezüglichen Aufgaben werden in der Statik, der Lehre vom Gleichgewichtszustande der Kräfte, gelöst, und zwar entweder rein analytisch oder graphisch. Die erstere Methode gibt nie eine Garantie für die richtige Lösung einer Aufgabe, weil ein begangener Rechenfehler leicht unentdeckt bleibt, wogegen die zeichnerische Behandlung einen Fehler meist schnell erkennen und korrigieren läfst. Aus diesem Grunde erklärt sich der Vorzug der graphischen Statik oder Graphostatik — d. i. die Gesamtheit der Methoden, welche eine zeichnerische Lösung von Aufgaben aus der Statik ermöglichen — gegenüber der Rechnung. Natürlich ist dieser Vorzug nur dann berechtigt, wenn die Zeichnung mit peinlichster Genauigkeit und Schärfe ausgeführt wird, denn die Kraft wird in dieser als geometrische Gröfse dargestellt, so dafs ein flüchtig hingeworfenes Kräftebild völlig wertlos ist. In geometrischer Darstellung ist die absolute Kraftgröfse gegeben durch eine gerade Linie, deren Anfangspunkt der Angriffspunkt, deren Länge die Gröfse und deren Richtung auch die Richtung der Kraft ist. Deshalb ist bei jeder Zeichnung ein bestimmter Kräftemafsstab anzunehmen, so dafs zum Beispiel eine Kraft $P = 1000$ kg durch eine Gerade von 20 mm auszudrücken ist, wenn 50 kg = 1 mm sein soll.

Erstes Kapitel.

Zusammensetzung und Zerlegung von Kräften in der Ebene.

§ 1. Zwei oder mehrere Kräfte mit gemeinschaftlichem Angriffspunkt.

Schliefsen die sich in S schneidenden Kräfte P_1 und P_2 den Neigungswinkel α miteinander ein, so ist zunächst nur die Lage der durch den Schnittpunkt S beider Kräfte gehenden Resultierenden R von vornherein bekannt, wogegen die Gröfse und die Richtung derselben noch zu suchen sind. Dies geschieht rein analytisch mittels des Cosinus- und Sinussatzes, denn nach Fig. 1 folgt aus:

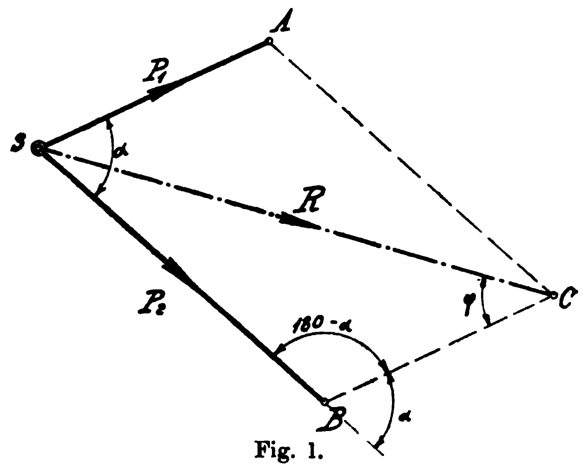


Fig. 1.

$$\cos(180 - \alpha) = \frac{P_1^2 + P_2^2 - R^2}{2\,P_1\,P_2}$$

$$R = \sqrt{P_1^2 + P_2^2 + 2\,P_1\,P_2 \cos\alpha}$$

und aus:

$$\frac{\sin\varphi}{\sin(180 - \alpha)} = \frac{P_2}{R}$$

$$\sin\varphi = \frac{P_2}{R}\sin\alpha$$

Eine bequemere Bestimmung der Gröfse, Richtung und Lage der Resultierenden R von P_1 und P_2 bietet die Mechanik mit der Parallelogrammkonstruktion (Fig. 2), welche ohne Rechnung bedeutend schneller und für praktische Anwendungen hinreichend genau zum Ziele führt. Diese Konstruktion kann nun nach Fig. 3 sogar noch vereinfacht werden, indem man $AC \# SB$ und $AS \# BC$ fortläfst und direkt $BC \# AS$ an SB in B anreiht. Zieht man hierauf die Verbindungslinie SC, die sogenannte Schlufslinie, so stellt diese der Gröfse und Richtung nach die Resultierende R

beider Kräfte P_1 und P_2 dar. Hierbei erkennt man aus Fig. 3, daſs der durch einen Pfeil angedeutete Richtungssinn der Resultierenden vom Anfangspunkt S nach dem Endpunkt C des Kräftezuges geht, daſs also die Pfeilrichtung der Resultierenden der der Komponenten entgegengesetzt gerichtet ist. Diese Regel bestätigt sich auch beim Zeichnen des Kräftedreiecks SAC, welches durch Anreihen der Kraft P_2 an P_1 in A entstanden ist, wobei dann wieder SC als Schluſslinie die Resultierende R darstellt.

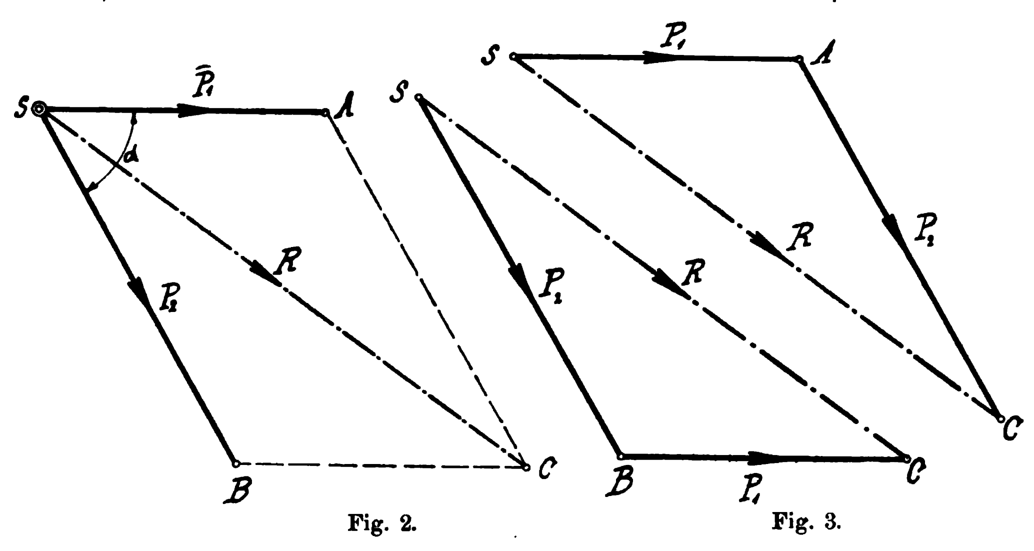


Fig. 2. Fig. 3.

Wird in Fig. 1 der Neigungswinkel $ASB = \alpha$ gleich Null, also der Supplementwinkel SAC resp. SBC gleich 180°, so fällt nach Fig. 4 die Resultierende in die Kraftrichtung von P_1 und P_2 und ergibt sich ihrer Gröſse nach zu $R = P_1 + P_2$. Für $ASB = 180^{\circ}$, also SBC resp. SAC gleich Null wird die mit den Komponentenrichtungen zusammenfallende Resultierende $R = P_1 - P_2$ (Fig. 5), wobei noch der Spezialfall möglich ist,

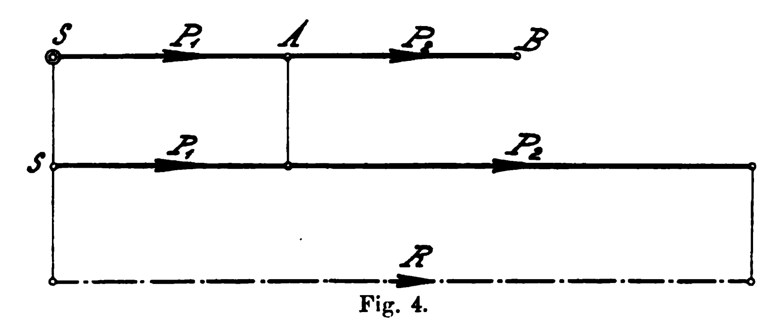


Fig. 4.

daſs $P_1 = P_2$, also $R = o$ ist. Die beiden gleich groſsen aber entgegengesetzt gerichteten Kräfte halten sich dann das Gleichgewicht (siehe Fig. 6). Dreht man bei einem Kräftedreiecke, wie in Fig. 7, die Pfeilrichtung der Resultierenden um, so entsteht ein geschlossenes Kräftedreieck, in welchem der Umfahrungssinn der Pfeile ein stetiger ist. Ein solches Dreieck wird erhalten, wenn man sich eine in S angreifende Kraft R' zu P_1 und P_2 hinzu-

gefügt denkt, die der Resultierenden R von P_1 und P_2 gleich grofs, aber entgegengesetzt gerichtet ist. Diese Kraft R' hebt offenbar die Wirkung von R auf, so dafs sich alle drei Kräfte P_1, P_2 und R' im Gleichgewicht befinden. Hieraus folgt der wichtige Satz:

Sollen drei Kräfte im Gleichgewicht stehen, so müssen sie sich in ein und demselben Punkte schneiden.

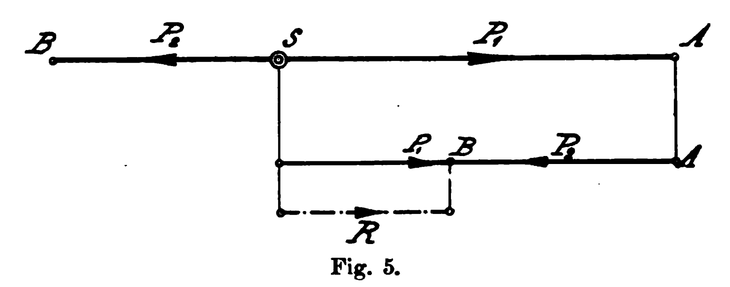


Fig. 5.

Im geschlossenen Kräftedreieck ist demnach die Resultierende $R = o$; jede Kraft in demselben wird aber durch Umkehrung der Pfeilrichtung zur Resultierenden der beiden anderen gemacht.

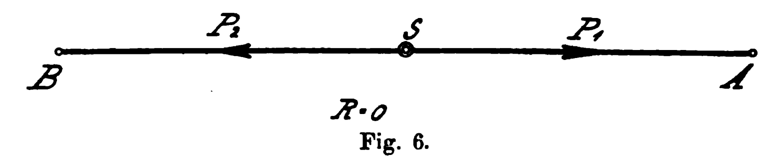


Fig. 6.

Haben mehr als zwei, z. B. vier Kräfte einen gemeinschaftlichen Angriffspunkt S, so läfst sich die Resultierende wieder der Gröfse, Richtung und Lage nach mittels der Parallelogrammkonstruktion erhalten, indem man

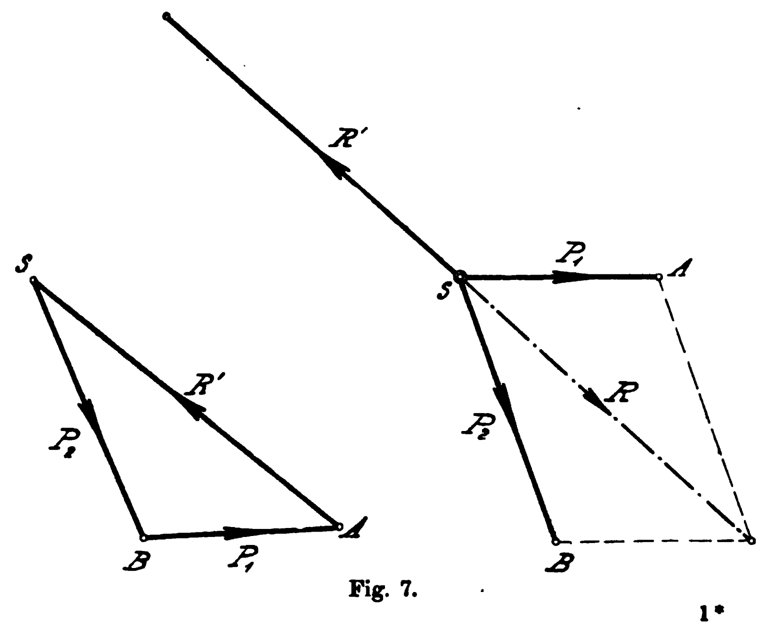


Fig. 7.

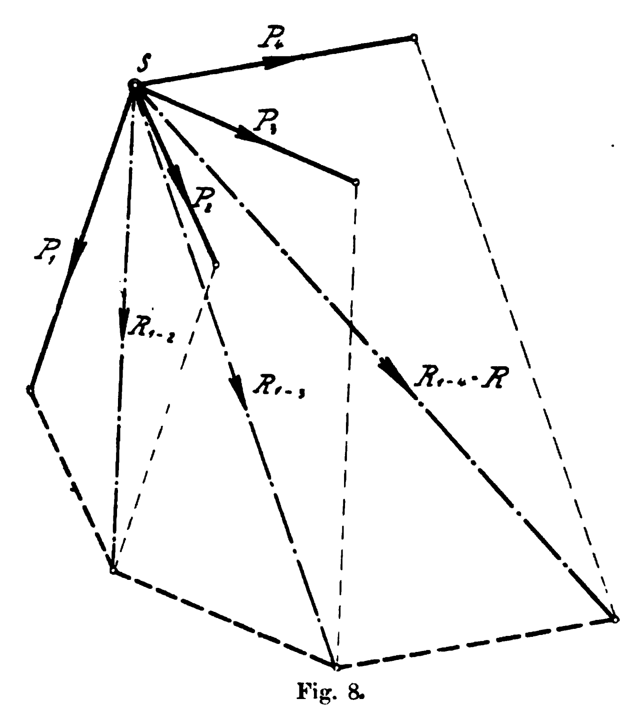


Fig. 8.

etwa, wie in Fig. 8, P_1 und P_2 zur Resultierenden R_{1-2} vereinigt, diese wieder mit P_3 zu R_{1-3} zusammensetzt und endlich aus R_{1-3} und P_4 die gesuchte Gröfse $R_{1-4} = R$ bestimmt.

Einfacher ergibt sich R mit Hilfe des sogenannten Kräftepolygons, indem man in S beginnend, die Kräfte ihrer Gröfse und Richtung nach wie in Fig. 9 aneinanderreiht. Die Verbindungslinie des Anfangspunktes S mit dem Endpunkt B des Kräftezuges ist dann als Schlufslinie SB das gesuchte R. Der Beweis für die Richtigkeit der Konstruktion ist durch Vergleich der Fig. 8 mit Fig. 9 unmittelbar gegeben, und es läfst die Pfeilrichtung von R vom Anfangspunkt S nach dem Endpunkt B des Kräftezuges erkennen, dafs auch hier wie in Fig. 3 die Regel gilt:

Richtungssinn der Resultante entgegengesetzt dem Umfahrungssinn des Komponentenzuges.

Hierbei ist es nach Fig. 10 ganz gleichgültig, in welcher Reihenfolge das Aneinanderreihen der Kräfte vorgenommen wird.

Fällt der Anfangspunkt S des Kräftezuges mit dessen Endpunkt B zusammen, ist also $R = o$, so stehen sämtliche Kräfte im Gleichgewicht. Das erhaltene Kräftepolygon, bei dem

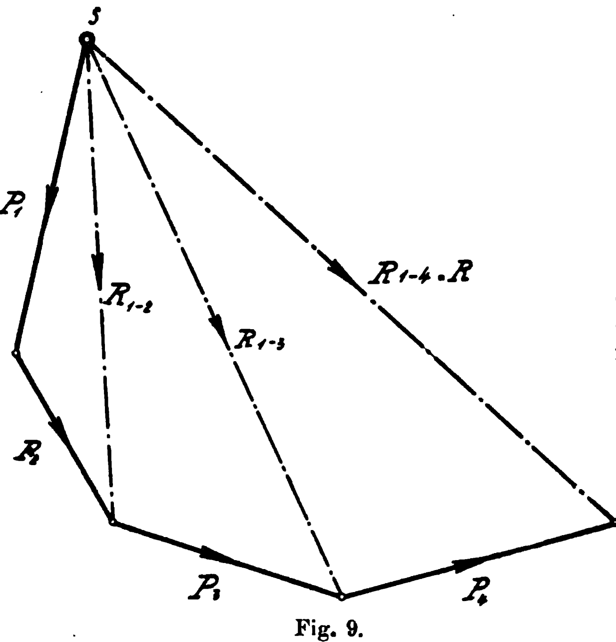


Fig. 9.

nun der Umfahrungssinn der Pfeile ein stetiger ist, heifst dann ein geschlossenes. Kehrt man in diesem bei irgendeiner Kraft die Pfeilrichtung um, so wird die betreffende Kraft zur Resultierenden aller anderen gemacht.

§ 2. Zwei oder mehrere Kräfte mit verschiedenen Angriffspunkten.

Bei mehr als zwei zerstreut in der Ebene wirkenden Kräften, die sich nicht in einem Punkte schneiden, bringt man, wie in der Mechanik gezeigt, zunächst P_1 und P_2 zum Schnitt in A und bestimmt deren Resultierende R_{1-2}. Mittels Verschiebung von R_{1-2} bis zum Schnitt S mit der Kraftrichtung von P_3 läfst sich dann nach Fig. 11 die Resultierende von R_{1-2} und P_3, nämlich R, der Gröfse, Richtung und Lage nach fixieren. Denkt man sich hierbei mit R_{1-2} auch das zugehörige Kräfteparallelogramm nach S verlegt, so ist $R = SB$ als Schlufslinie des von P_1, P_2 und P_3 gebildeten Kräftezuges erkennbar. Auch hier kann deshalb durch Aufzeichnung des Kräftepolygones die Resultante der gegebenen drei Kräfte ohne weiteres gefunden werden. Dasselbe gilt für vier und mehr Kräfte. Immer wird bei ganz beliebiger Anreihungsfolge derselben die Resultierende R der Gröfse und Richtung nach erhalten, dagegen erfordert die gleichzeitige Feststellung der Lage von R eine andere Methode, die in Fig. 12 dargestellt ist.

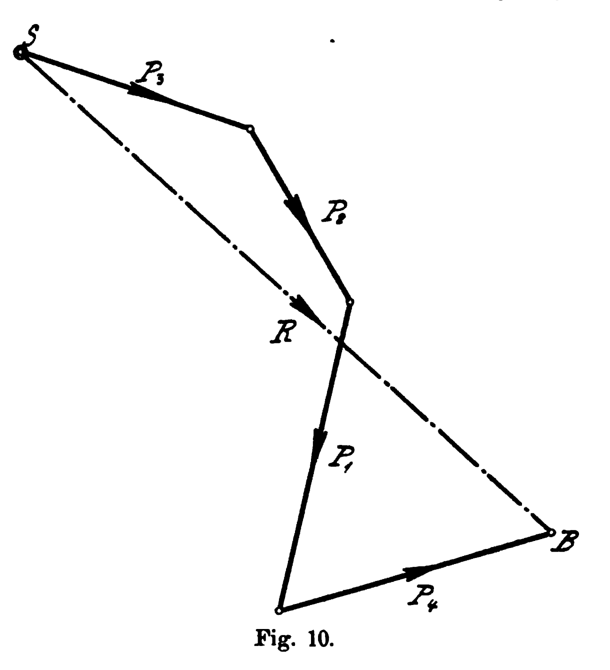


Fig. 10.

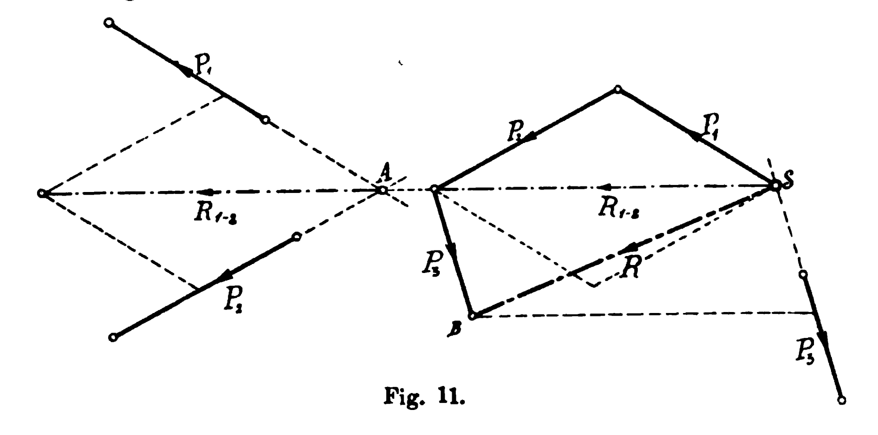


Fig. 11.

Man denkt sich die Kraft P_1 durch zwei andere Kräfte von irgendwelcher Richtung ersetzt, und zwar seien, im beliebigen Punkt *I* auf der Kraftrichtung von P_1 angreifend, 1 und 2 die Ersatzkräfte, die P_1 das Gleichgewicht halten. Die Gröſse von 1 und 2 ergibt sich aus dem geschlossenen Kräftedreieck *acO*, in welchem *aO* parallel und gleich der Kraft 1, und *cO* parallel und gleich 2 ist. Ebenso sei P_2 durch zwei andere Kräfte, 2 und 3, in *II* angreifend, ersetzt, von denen die eine gleich der zu P_1 gehörigen Kraft 2, aber entgegengesetzt gerichtet ist. Man erhält

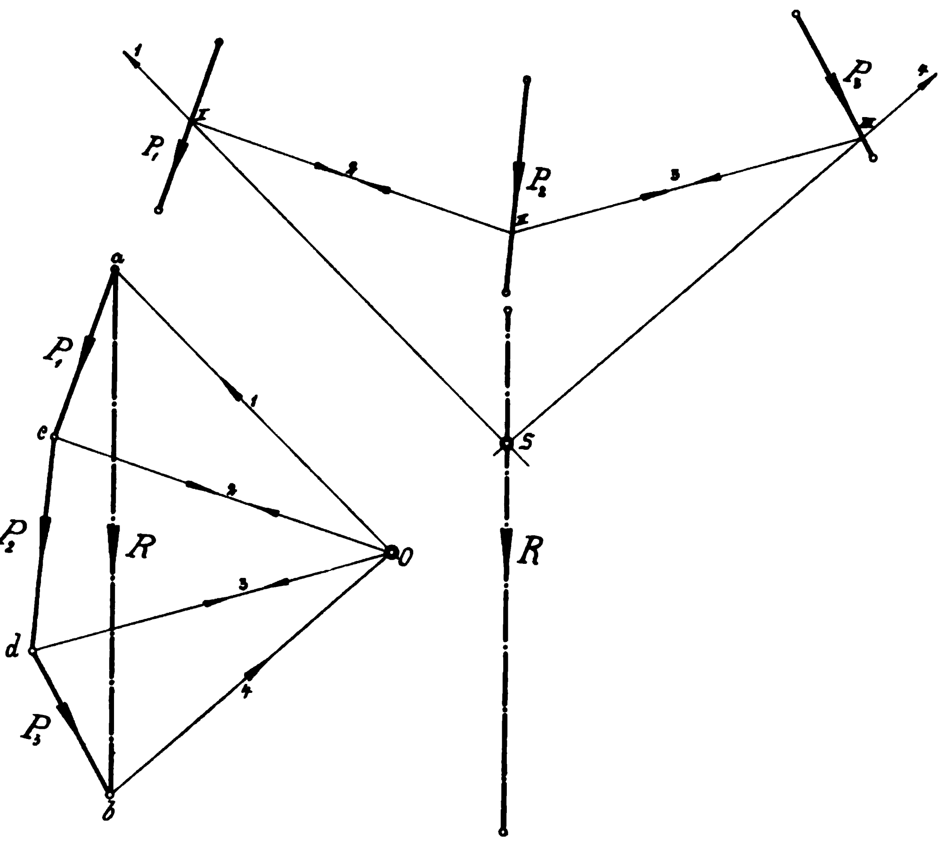


Fig. 12.

2 und 3 aus dem geschlossenen Kräftedreieck *cdO*. Geht man nun in genau entsprechender Weise mit P_3 vor, sind also dann die Kräfte P_1, P_2 und P_3 durch 1 und 2, 2 und 3 und 3 und 4 ersetzt, von denen sich, wie in Fig. 12 ersichtlich, die gleich groſsen und entgegengesetzt gerichteten Kräfte 2 und 2 und 3 und 3 aufheben, so bleiben nur die Kräfte 1 und 4 übrig. Die Verlängerung von 1 und 4 ergibt deshalb den Schnittpunkt *S*, durch welchen die 1 und 4 das Gleichgewicht haltende Kraft *R* geht. Da aber *R* gleichzeitig Resultierende aller *P* ist, so ist hiermit deren Lage genau festgelegt, wogegen die Gröſse und Richtung aus dem Kräftepolygon entnommen werden kann.

In Fig. 12 nennt man den Punkt O des Kräftepolygons den Pol, die Linien aO, cO, dO und bO die Polstrahlen, die Punkte I, II und III Knotenpunkte und den durch die Knotenpunkte gehenden, zu den Polstrahlen parallelen Linienzug das Seilpolygon.

Nachdem nun an der Hand vorstehender Erklärung und der Fig. 12 der Zusammenhang zwischen Seil- und Kräftepolygon erkannt ist, wird man bei Bestimmung der Resultierenden mehrerer zerstreut in der Ebene wirkenden Kräfte am einfachsten folgendermaſsen vorgehen:

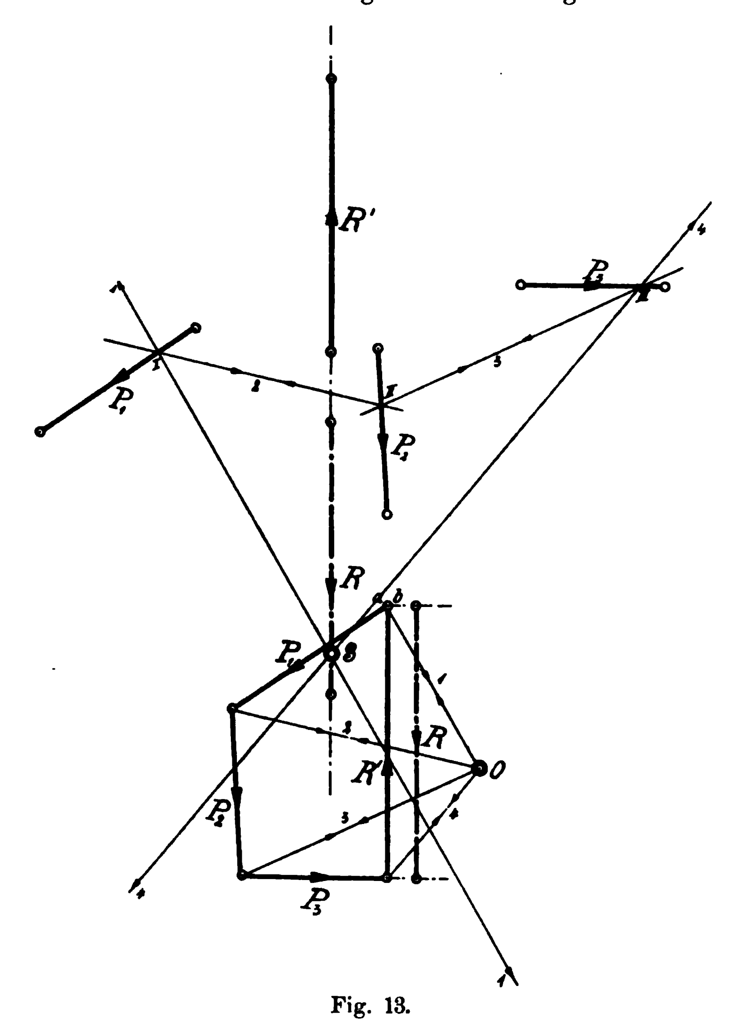


Fig. 13.

Man reiht die gegebenen Kräfte zu einem Kräftepolygon aneinander und erhält durch die Schluſslinie Gröſse und Richtung der Resultierenden. Dann wählt man einen beliebigen Pol O, zieht die Polstrahlen und hierauf nach Annahme irgendeines Punktes auf der Richtungslinie einer beliebigen Kraft das zugehörige Seilpolygon. Durch den Schnittpunkt S der äuſsersten Seilzugseiten geht dann die Resultierende R.

Ersetzt man die Resultierende durch eine gleich grofse, aber entgegengesetzt gerichtete Kraft R', so befindet sich das ganze Kräftesystem im Gleichgewicht. Das in Fig. 13 aus den Kräften P_1, P_2, P_3 und R' konstruierte Kräftepolygon ist wieder ein geschlossenes, da der Endpunkt b der Kraft R' mit dem Anfangspunkt a von P_1 zusammenfällt. Dementsprechend bildet auch das Seilpolygon einen geschlossenen Linienzug I, II, III und S, so dafs die wichtige Regel entsteht:

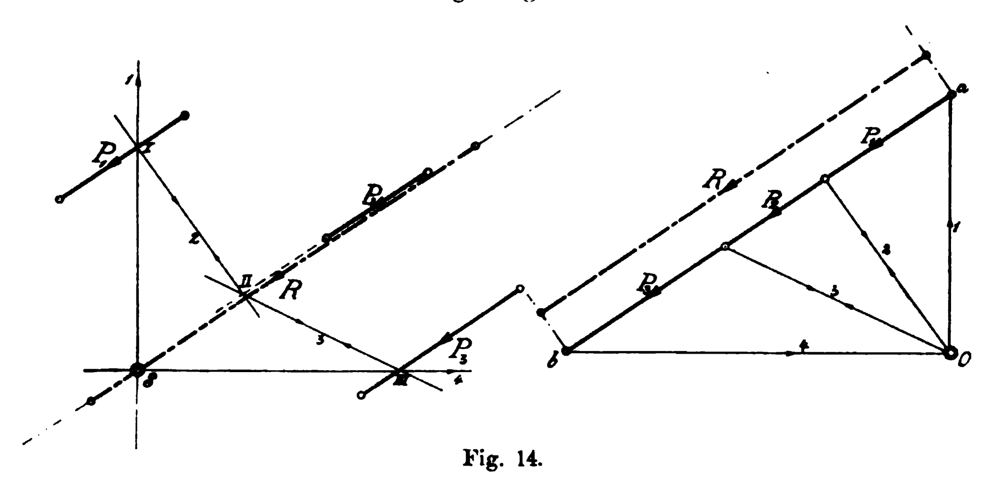


Fig. 14.

Halten sich beliebig viele Kräfte mit verschiedenen Angriffspunkten das Gleichgewicht, so schliefst sich sowohl das Kräfte- als auch das zugehörige Seilpolygon.

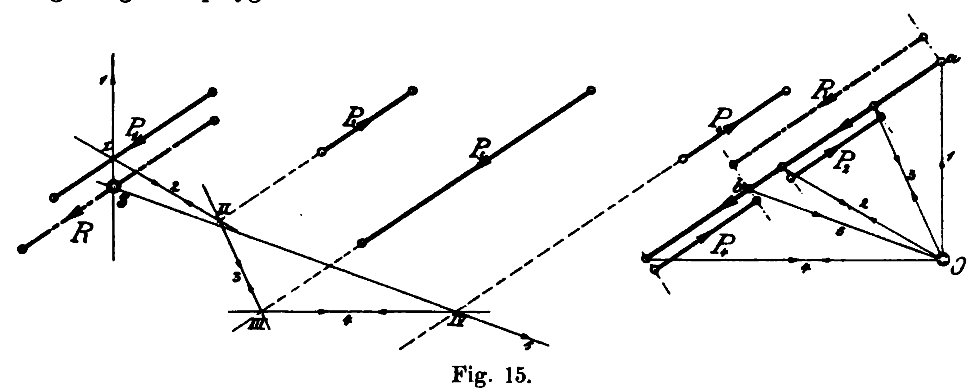


Fig. 15.

Sind die in der Ebene wirkenden Kräfte parallel und gleichgerichtet, so erfolgt ihre Zusammensetzung zu einer Resultierenden mittels Kräfte- und Seilpolygons in genau entsprechender Weise wie bei beliebig gerichteten Kräften. Jedoch geht in diesem Falle nach Fig. 14 das Kräftepolygon in eine Kraftlinie über, in welcher ab die Resultierende R darstellt. Dasselbe gilt für parallele, ungleich gerichtete Kräfte, nur ist hier besonders zu beachten, dafs jede Kraft nach dem vorgeschriebenen Richtungssinn an den

Endpunkt der vorhergehenden angetragen wird. In Fig. 15 ist deshalb $R = ab$ die Resultierende, zu welcher die Ersatzkräfte 1 und 5 gehören. Jeglicher Irrtum bei der Feststellung der Gröſse von R wird ausgeschlossen, wenn bei der sonst beliebigen Aneinanderreihung der Komponenten die zugehörigen Ersatzkräfte (Polstrahlen) mit 1 beginnend fortlaufend numeriert werden. Die mit niedrigster und höchster Nummer versehenen Polstrahlen schneiden demnach immer die Gröſse von R auf der Kraftlinie ab. Eine fortlaufende Numerierung der Polstrahlen erleichtert auch die Aufzeichnung des Seilpolygons, indem man nicht erst die zu den einzelnen Kräften gehörigen Strahlen zu suchen hat.

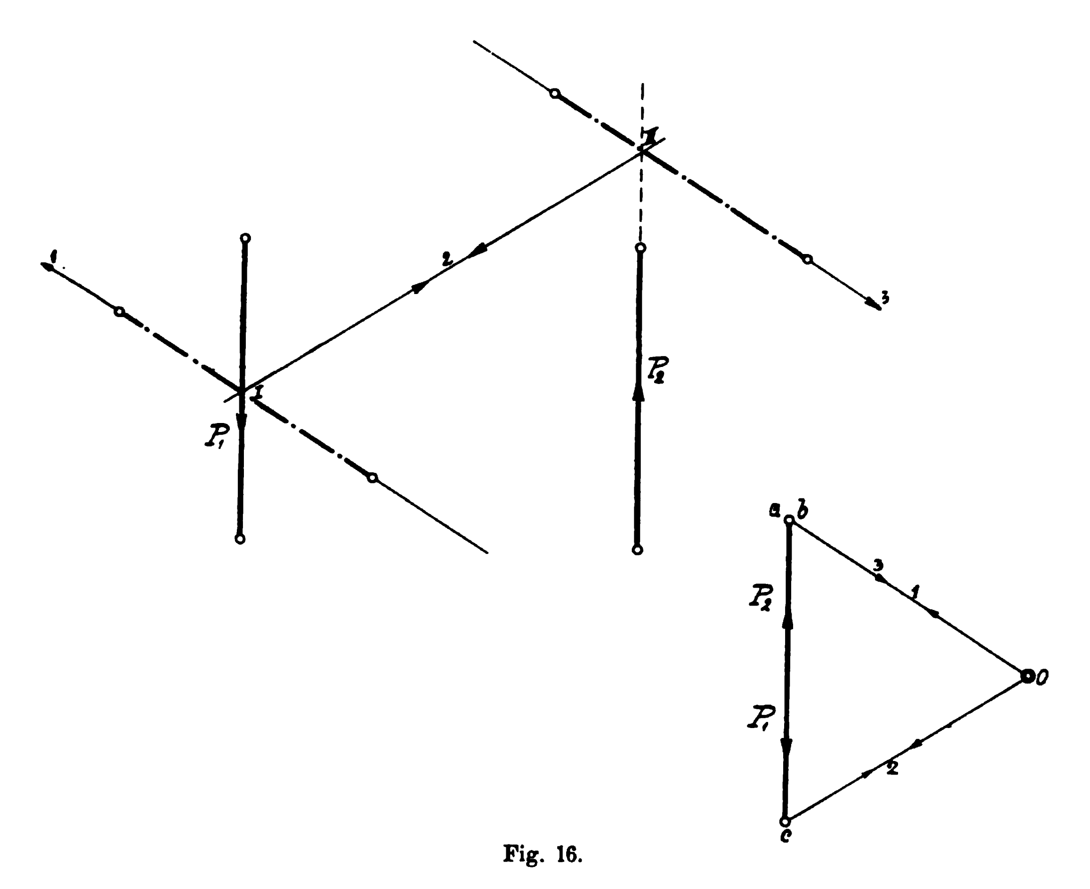


Fig. 16.

§ 3. Kräftepaare.

Sind zwei ungleich gerichtete Parallelkräfte mit verschiedenen Angriffspunkten gleich groſs, so entsteht ein Kräftepaar, dessen Resultierende bekanntlich im Unendlichen liegt und gleich Null ist. Hiervon überzeugt man sich nach Fig. 16 durch Aufzeichnung des Kräftepolygones, wobei man durch Anreihung von P_2 an P_1 in c wieder zum Anfangspunkt a, der also gleichzeitig Endpunkt b ist, zurückkehrt. Die Ersatzkräfte von P_1 sind demnach 1 und 2, und jene von P_2 2 und 3. Konstruiert man weiter das

Seilpolygon, so schneiden sich die zu den Polstrahlen 1 und 3 parallelen äufsersten Seilzugseiten 1 und 3 im Unendlichen, da sie auch zueinander parallel sind. Gleichzeitig erkennt man in 1 und 3 ein neues Kräftepaar, welches bei umgekehrtem Drehsinn das Bestreben zeigt, eine etwaige Drehwirkung von P_1 und P_2 wieder aufzuheben. Letztere Eigenschaft der äufsersten Seilzugseiten legt die Frage nahe, ob sich mittels Kräfte- und Seilpolygons ein Kräftepaar konstruieren läfst, welches die Wirkung von mehreren zerstreut in der Ebene wirkenden Kräftepaaren aufhebt. Dieses ist nach Fig. 17 tatsächlich möglich. Sind zwei Kräftepaare P_1 und P_2

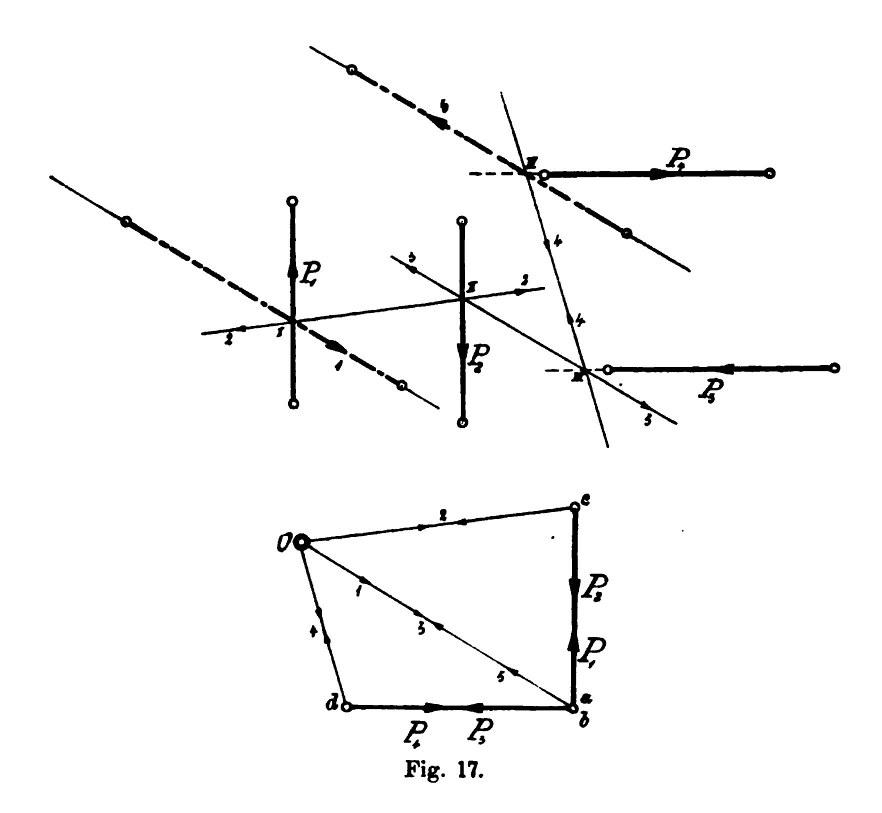
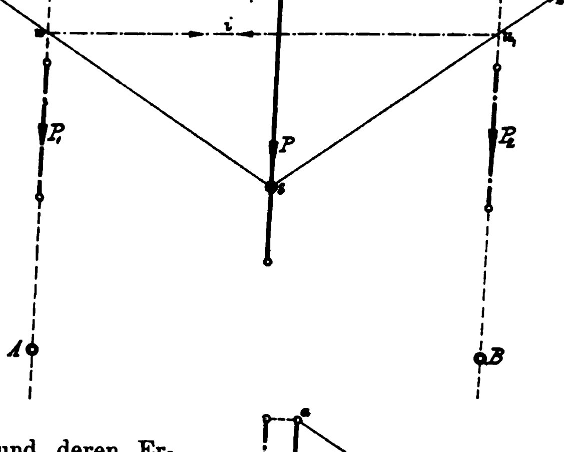


Fig. 17.

und P_3 und P_4 gegeben, so reiht sich mit P_1 beginnend an c die Kraft P_2, deren Endpunkt b mit dem Anfangspunkt a von P_1 zusammenfällt. In b folgt dann P_3 und von d wieder nach b resp. a zurück das P_4. Das Kräftepolygon $acbda$ ist demnach geschlossen. Zieht man von Pol O die Strahlen 1 bis 5 und konstruiert, in I beginnend, das Seilpolygon, so sind 1 und 2 die Ersatzkräfte von P_1, während 2 und 3 zu P_2, 3 und 4 zu P_3 und 4 und 5 zu P_4 gehören. Im Seilpolygon *I II III IV* heben sich die gleich grofsen und entgegengesetzt gerichteten Kräfte 2 und 2, 3 und 3 und 4 und 4 auf, so dafs nur 1 und 5 übrigbleiben, die wieder einander gleich grofs, parallel und entgegengesetzt gerichtet, ein Kräftepaar ergeben, dessen Wirkung jene von P_1 und P_2 und P_3 und P_4 aufhebt.

§ 4. Zerlegung einer oder mehrerer Kräfte in Parallelkomponenten.

Sehr häufig liegt die Aufgabe vor, für eine Kraft P die durch zwei bekannte Punkte A und B gehenden Parallelkomponenten P_1 und P_2 zu suchen. Hierbei gehe man nach Fig. 18 zunächst rein mechanisch vor. Man zeichne P mit dem angenommenen Pol O und ziehe durch den beliebigen Punkt S auf der Kraftrichtung von P die den Polstrahlen parallelen Seilzugseiten 1 und 2, welche die gegebenen Richtungslinien von P_1 und P_2 in u und u_1 schneiden. Die durch Pol O zur Schlufslinie $u u_1$ gezogene Parallele i bestimmt dann mittels des Schnittpunktes c auf P die Gröfse der gesuchten Komponenten P_1 und P_2. Die Richtigkeit der angegebenen Konstruktion leuchtet ohne weiteres ein, denn in dem erhaltenen Kräfteplan ist P die Resultierende von P_1 und P_2, weil die geschlossenen Kräftedreiecke $a c O$ und $c b O$ für P_1 die Ersatzkräfte 1 und i, für P_2 aber 2 und i ergeben, von denen sich i und i gegenseitig aufheben. Deshalb sind 1 und 2 nicht nur Ersatzkräfte von P, sondern auch von $P_1 + P_2$, so dafs P_1 und P_2 Komponenten von P sein müssen.



Sollen die durch A und B gehenden gesuchten Komponenten P_1 und P_2 auf ein und derselben Seite von P liegen, wie in Fig. 19, so ist die Konstruktion und deren Erklärung genau die gleiche wie in Fig. 18, obschon die Zeichnung ein ganz verändertes Aussehen bekommt.

Durch Erweiterung der letztgenannten Aufgaben lassen sich auch die Stützdrücke resp. -reaktionen eines Trägers auf zwei Stützen bestimmen, welcher durch eine Anzahl Parallelkräfte belastet ist. Man entwirft für die gegebenen Kräfte, z. B. P_1, P_2 und P_3, nach Fig. 20 in bekannter Weise Kräfte- und Seilpolygon und bringt die äufsersten Seilzugseiten zum Schnitt mit den Kraftrichtungen der zu bestimmenden Stützdrücke R' und R''. Die durch Pol O parallel zur Schlufslinie $u u_1$ gezogene Gerade i schneidet dann auf der Kraftlinie $a b = R = P_1 + P_2 + P_3$ die Strecken $a c$ und $b c$ ab, welche die Gröfsen von R' und R'' darstellen. Die Richtung dieser Stützdrücke bestimmt immer derjenige äufsere Polstrahl, der mit der ersten Kraft P_1 oder zuletzt angereihten Kraft P_3 ein geschlossenes Kräftedreieck bildete. Hier zeigt also Strahl 1 die Richtung von R' und Strahl 4 die von R'' an. Durch Umdrehung der Pfeilspitzen von R' und R'' sind dann auch die Richtungen der Reaktionen R_1 und R_2 gegeben.

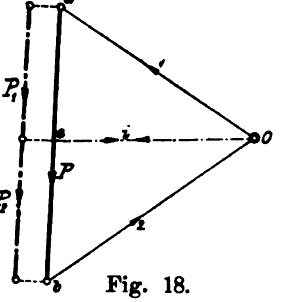


Fig. 18.

Vorstehende Konstruktion läfst sich zeichnerisch noch etwas vereinfachen, indem man wie in Fig. 21 das Kräfte- und Seilpolygon teilweise ineinander fügt. Die Kraftlinie läfst man mit der Richtung von R' zusammenfallen und nimmt den Pol O auf der Richtungslinie von P_1 an. Der erste Polstrahl 1 fällt dann mit der ersten Seilzugseite zusammen, während die zweite Seilzugseite durch Verlängerung des Polstrahles 2 gebildet wird.

§ 5. Anwendung der in § 1 bis § 4 gegebenen Methoden.

Die bis jetzt kennen gelernten Konstruktionen bilden das Fundament für den weiteren Aufbau der Graphostatik und sind von grofser Bedeutung für das Verständnis alles Nachfolgenden, so dafs es angezeigt erscheint, eine

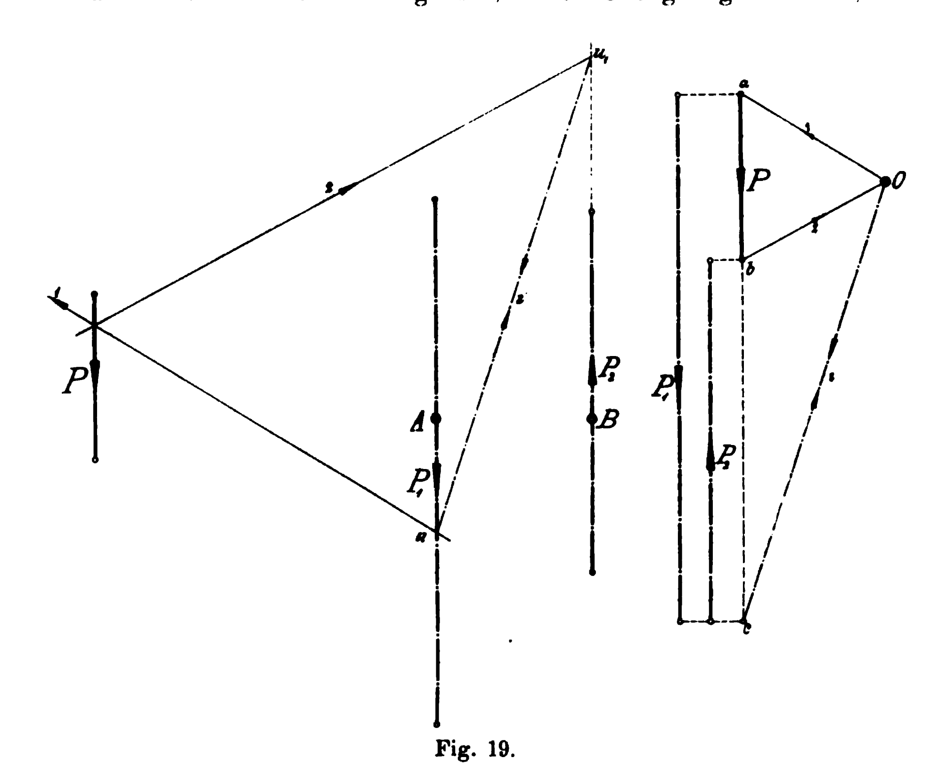


Fig. 19.

Reihe von Übungsaufgaben einzuschalten, die den Studierenden anregen sollen, sich mit dem bisherigen Stoff gründlich vertraut zu machen. Hierbei soll zunächst die Parallelogrammkonstruktion mitbenutzt werden.

Aufgabe 1.

Der in Fig. 22 dargestellte Ausleger ist am freien Ende mit $P = 1000$ kg belastet. Wie grofs sind die in den Streben A und B auftretenden Spannungen?

Lösung. Da P die Resultierende der Spannungen A und B ist, so erhält man die Gröfse der letzteren mittels des Kräftedreiecks Fig. 23, wobei $A = \backsim 2260$ kg und $B = \backsim 2020$ kg.

Aufgabe 2.

Welche Spannungen treten im Kurbelgetriebe Fig. 24 auf, wenn der Kolbendurchmesser $d = 400$ mm und das Längenverhältnis der Kurbel zur Pleuelstange $\frac{r}{L} = \frac{1}{5}$ ist? Der Kurbelwinkel sei $\omega = 45^0$ und der bei diesem herrschende Dampfüberdruck $p = 5$ kg pro qcm Kolbenfläche.

Lösung. Der horizontal wirkende Dampfüberdruck

$$D = d^2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot p = 40^2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 5 = \backsim 6280 \text{ kg}$$

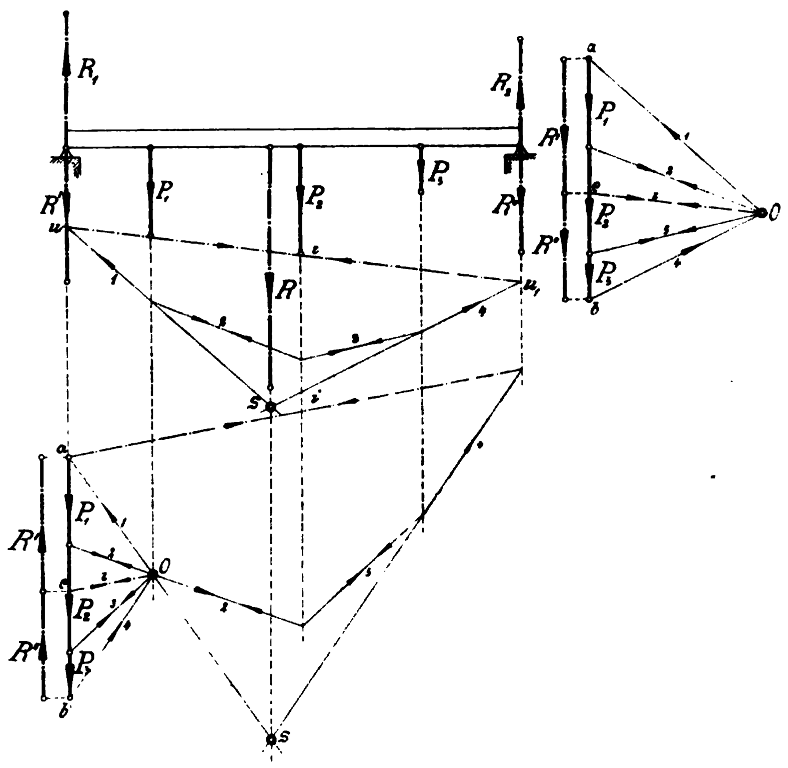


Fig. 20 und 21.

zerlegt sich am Kreuzkopfzapfen in die Pleuelstangenkomponente R und die zur Gleitbahn senkrecht stehende Komponente N. Am Kurbelzapfen wirkend ist R die Resultierende, zu welcher der Kurbeldruck K und die Arbeit leistende Tangentialkraft T Komponenten sind. Aus den aneinander gereihten Kräftedreiecken von D, R und N und R, T und K ergibt sich dann nach Fig. 25 unter Berücksichtigung des zugrunde gelegten Kräftemafsstabes:

$$D = 6280 \text{ kg}, \; N = \backsim 900 \text{ kg}, \; R = \backsim 6400 \text{ kg}, \; K = \backsim 3700 \text{ kg}$$
$$\text{und } T = \backsim 5100 \text{ kg}.$$

Aufgabe 3.

Nach Fig. 26 ist diejenige Kraft P parallel zur schiefen Ebene wirkend zu bestimmen, deren geringste Vergröfserung einen Körper von $G = 500$ kg die schiefe Ebene hinaufzieht. Der Reibungskoeffizient sei $f = 0{,}27$.

Lösung. Ohne Rücksicht auf Reibung wäre P ohne weiteres dem aus G, K und N gebildeten Kräftedreieck Fig. 27 zu entnehmen, da

$$P = K = G \cdot \sin \alpha$$

sein müfste. Die Gröfse der Reibung findet man mit Hilfe des Reibungswinkels $\varphi = 15^0$, der sich aus $f = tg\,\varphi = 0{,}27$ ergibt. Aus

$$tg\,\varphi = \frac{W}{N}$$

folgt dann

$$W = N \cdot tg\,\varphi = N \cdot f.$$

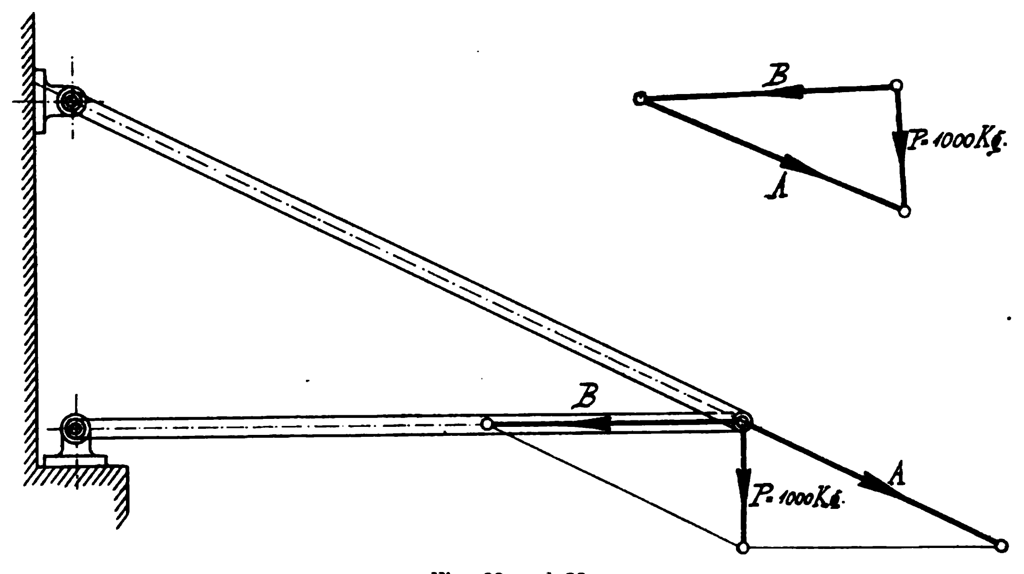


Fig. 22 und 23.

Die K und W das Gleichgewicht haltende Kraft P ist somit nach Zeichnung bestimmt mit:

$$P = K + W = 250 + 105 = 355 \text{ kg}.$$

Aufgabe 4.

Unter sonst gleichen Verhältnissen wie in voriger Aufgabe soll die parallel zur Basis der schiefen Ebene wirkende Kraft P ermittelt werden, deren geringste Vergröfserung den Körper nach aufwärts bewegt.

Lösung. Aus Fig. 28 erkennt man, dafs die Zugkomponente von P bestimmt ist mit:

$$P_1 = K + W_1 + W_2,$$

worin W_1 die durch N_1 und W_2 die durch N_2 erzeugte Reibung ausdrückt.

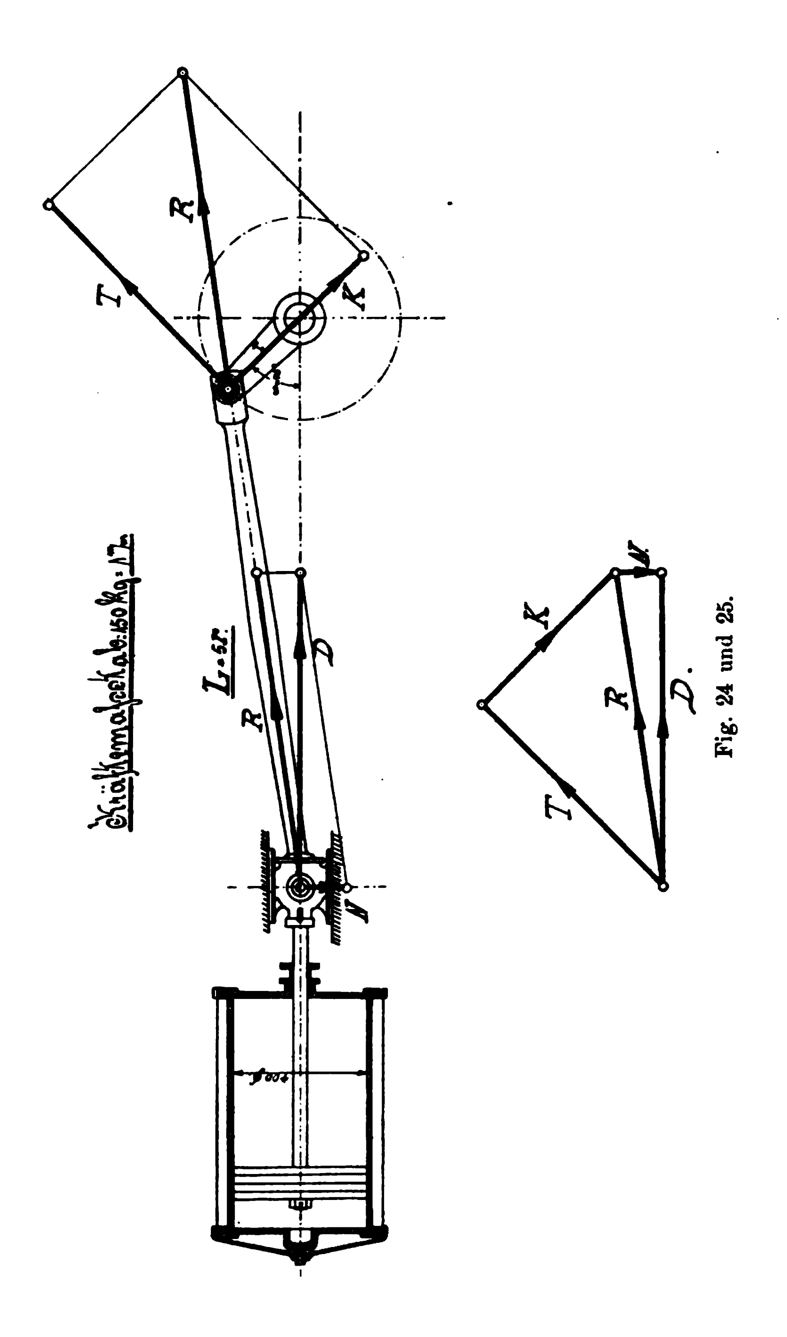


Fig. 24 und 25.

Die abwärts ziehende Gewichtskomponente K erhält man aus dem Kräftedreieck $G\,N_1\,K$ in Fig. 29 und hierin auch W_1, indem man den Reibungswinkel φ an a legt und den freien Schenkel zum Schnitt mit der Kraftrichtung von K bringt. Aus dem erhaltenen Dreieck folgt

$$W_1 = N_1\,tg\,\varphi.$$

Zieht man nun durch a eine Parallele zur Basis der schiefen Ebene, bis der freie Schenkel von φ in b geschnitten wird, so ist im Dreieck $a\,b\,c$ die gesuchte Gröfse

$$P = G\,tg\,(\alpha + \varphi)$$

durch die Gerade $a\,b$ bestimmt und mit dieser auch das $P_1 = K + W_1 + W_2$ und die Druckkomponente N_2. Die durch letztere erzeugte Reibung

$$W_2 = P_1 - (K + W_1) = N_2\,tg\,\varphi$$

ist dann ebenfalls in der Figur bekannt, so dafs erhalten wird:

$K = 240$ kg, $W_1 = 125$ kg, $W_2 = 68$ kg, also $P_1 = 433$ kg,
$N_2 = 250$ kg und $P = 500$ kg.

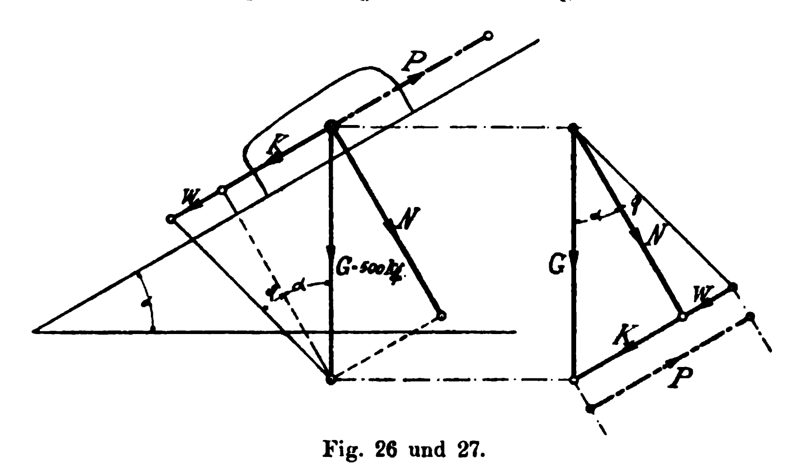


Fig. 26 und 27.

Aufgabe 5.

Mittels einer flachgängigen Schraube von mittlerem Gewinderadius r soll eine Last Q gehoben werden. Welche Kraft P_1 am Hebelarm R wirkend ist hierzu nötig? Siehe Fig. 30.

Lösung. Die tangential am mittleren Gewindeumfang wirkende Kraft P, deren geringste Vergröfserung ein Heben der Last Q herbeiführt, übt bekanntlich die gleiche Wirkung aus, als wenn sie parallel zur Basis der schiefen Ebene angreifend die Last Q die Ebene hinaufziehen soll. Natürlich ist hierbei Voraussetzung, dafs der Neigungswinkel der schiefen Ebene gleich dem Steigungswinkel der Schraube ist. Die graphische Berechnung der Kraft $P = Q\,tg\,(\alpha + \varphi)$ kann deshalb genau wie in voriger Aufgabe nach Fig. 29 vorgenommen werden, wenn aus dem Reibungskoëffizienten $f = tg\,\varphi$ zwischen Schraube und Futter der Reibungswinkel φ und aus

$$tg\,\alpha = \frac{h}{2\,r \cdot \pi} = \frac{\text{Ganghöhe}}{\text{Mittleren Gewindeumfang}}$$

der Steigungswinkel α ermittelt ist. P_1 ergibt sich dann entweder aus der Momentengleichung:

$$P_1 R - P \cdot r = o$$

oder läfst sich nach Fig. 31 konstruieren. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke folgt direkt:

$$\frac{P_1}{P} = \frac{r}{R} \text{ oder } P_1 = P \cdot \frac{r}{R}.$$

Aufgabe 6.

Es ist die in der Symmetrieebene senkrecht zum Keilrücken wirkende Kraft P zu ermittteln, deren geringste Vergröfserung ein Hineindrücken des Keiles verursacht.

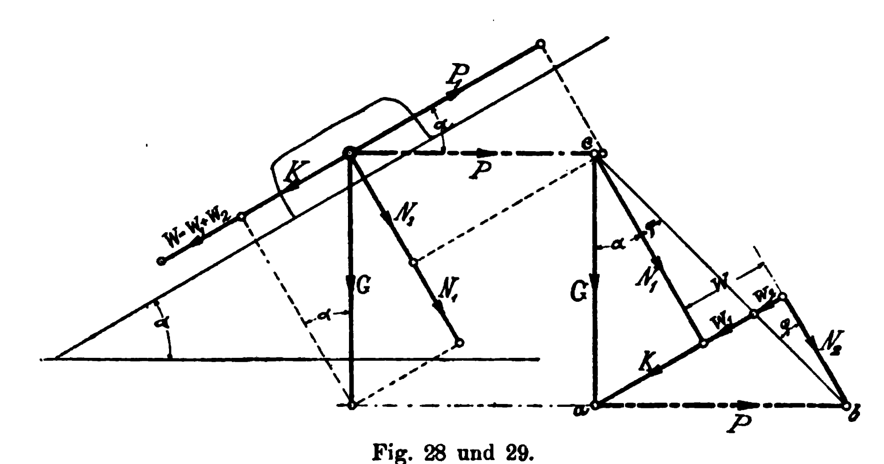


Fig. 28 und 29.

Lösung. Dem Hineintreiben des Keiles setzen sich die gegen die Keilflächen wirkenden Normaldrücke N und N sowie die durch letztere erzeugten Reibungswiderstände W und W entgegen. Zerlegt man deshalb N und W in Komponenten parallel und senkrecht zum Keilrücken, so kommen für die Bestimmung von P nur die letzteren in Frage, und es mufs nach Fig. 33 mindestens sein:

$$P = 2\,(K + W_H) = 2\,(N \sin \alpha + f N \cdot \cos \alpha).$$

Die Gröfse von K ergibt das Kräftedreieck aus N, V und K in Fig. 33 und die der Reibung W das Dreieck abc, in welchem $ab = W$ die Gegenseite des Reibungswinkels φ ist. Die Komponente W_H von $W = N \cdot tg\,\varphi$ folgt sodann aus dem Kräftedreieck W, W_v und W_H, so dafs

$$\frac{P}{2} = K + W_H \text{ oder } P = 2\,(K + W_H)$$

gefunden.

Aufgabe 7.

Mit Hilfe einer festen Rolle von $G = 50$ kg Gewicht ist eine Maximallast $Q = 1000$ kg zu heben. Es soll diejenige Kraft R ihrer Gröfse, Richtung und Lage nach bestimmt werden, die den Rollenbolzen auf Biegung beansprucht.

L ö s u n g. Schätzt man den Wirkungsgrad der Rolle auf 95 %, so ist die zum Heben von Q nötige Zugkraft:

$$Q_1 = \frac{Q}{0,95} = \sim 1050 \text{ kg.}$$

Das aus Q_1, G und Q konstruierte Kräftepolygon in Fig. 34 ergibt dann $R = \sim 1880$ kg. Die Richtung von R ist nun ebenfalls bekannt, dagegen

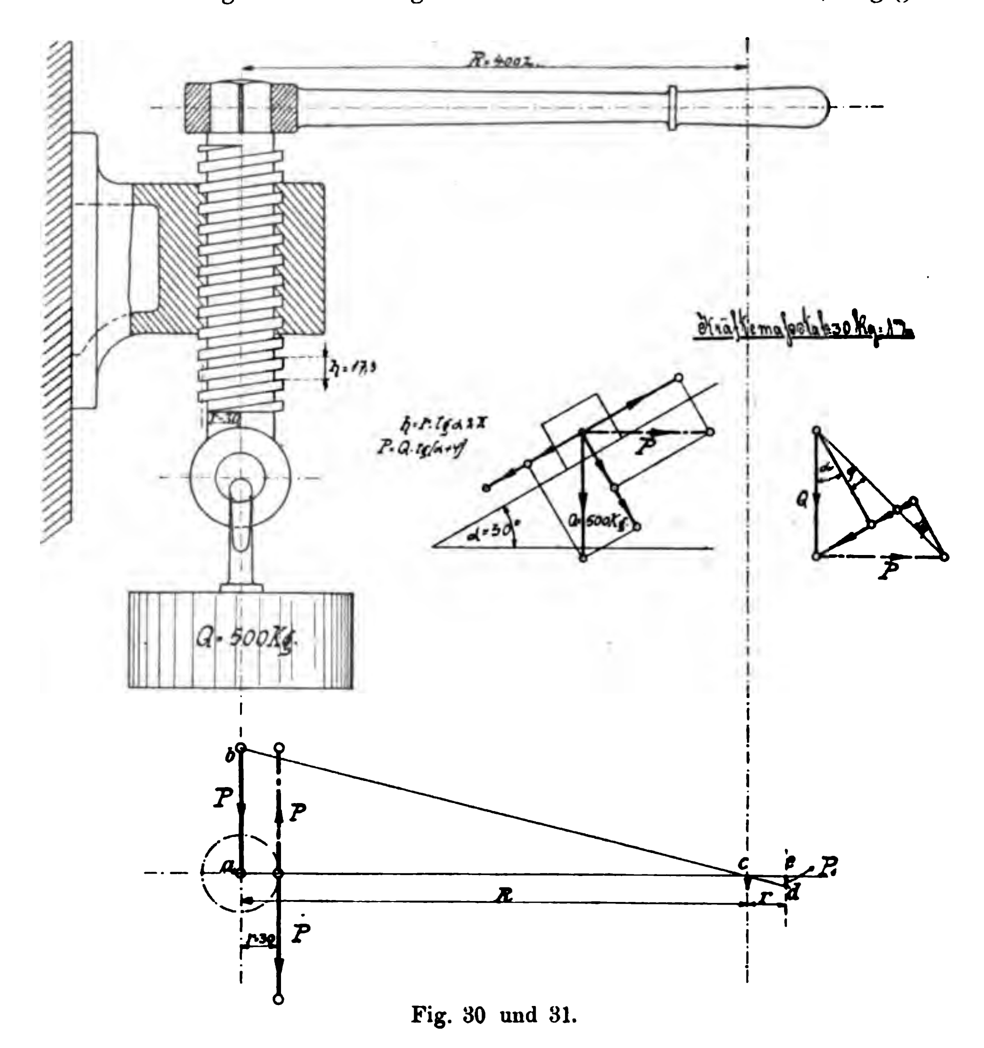


Fig. 30 und 31.

die Lage erst nach Aufzeichnung des Seilpolygons *I*, *II*, *III*, dessen äufserste Seiten 1 und 4 den Schnittpunkt *S* ergeben, durch welchen R gehen mufs. Die Figur zeigt nun, dafs die Resultierende R nicht durch die Rollenachse geht, sondern, auf diese bezogen, ein Moment $R \cdot x$ ausübt, welchem zur Vermeidung einer Drehung des Bolzens durch ein anderes Moment das Gleichgewicht zu halten ist, und zwar entweder durch das Reibungsmoment $W \cdot r_1$

oder ein Moment $F \cdot ks \cdot r$, je nachdem der Bolzen mittels eines Konusses oder eines Flachkeiles im Rollenlager befestigt ist. Im ersteren Falle ist r_1 der mittlere Radius des Konusses, im letzteren $F \cdot ks$ die Schubfestigkeit des Keiles und r der Radius bei zylindrisch gelagerten Bolzen.

Aufgabe 8.

Für dei Kräfte P_1, P_2 und P_3 soll nachgewiesen werden, daſs bei Bestimmung der Resultierenden R die Wahl des Poles O und die Aufeinanderfolge der Kräfteanreihung gleichgültig ist.

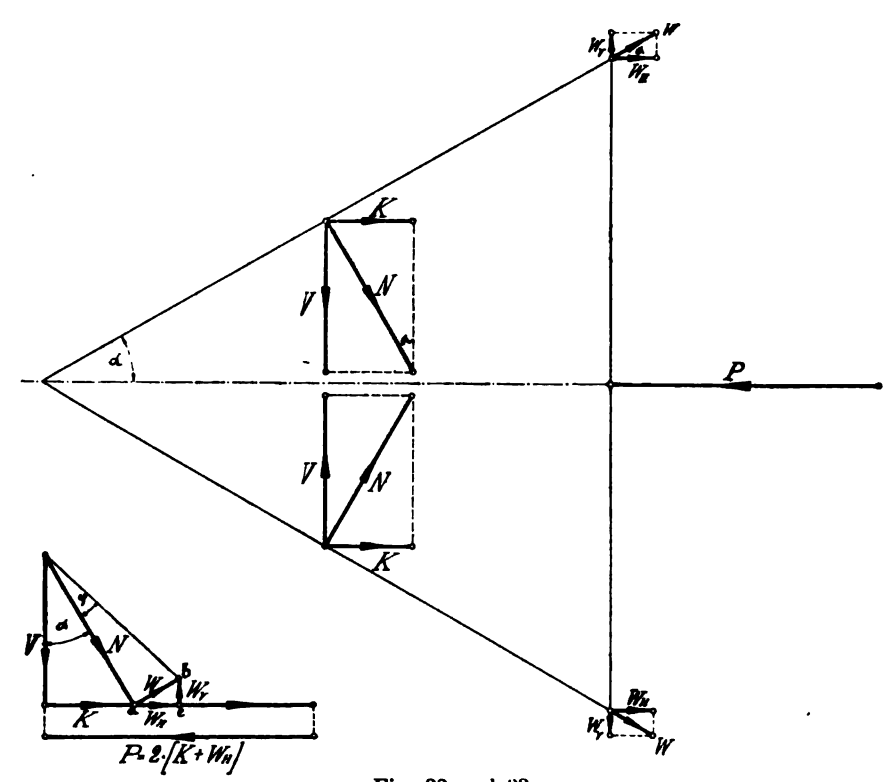


Fig. 32 und 33.

Lösung. Aus Fig. 35 ist die Lösung vorstehender Aufgabe direkt ersichtlich. R ist zunächst nach Gröſse, Richtung und Lage mittels direkter Aufeinanderfolge der gegebenen Kräfte P_1, P_2 und P_3 bestimmt worden und dann eine andere Kräftefolge, z. B. P_3, P_1 und P_2, gewählt, wobei der Endpunkt b des Kräftezuges mit dem Endpunkt des zuerst konstruierten Polygones zusammenfällt. Hierdurch ist nachgewiesen, daſs bei beiden Verfahren R in gleicher Gröſse und Richtung erhalten wird. Nach Annahme eines anderen Poles O', der Polstrahlen $1'$, $2'$, $3'$ und $4'$ und nach Aufzeichnung des neuen Seilpolygones I', II', III' ergeben dann die äuſsersten Seilzugseiten $1'$ und $4'$ den Schnittpunkt S', der bei exakter Durchführung der Zeichnung in der Richtungslinie des bereits fixierten R liegt, womit der Beweis gegeben, daſs auch die Lage von R die gleiche geblieben ist.

Aufgabe 9.

Ein Träger auf zwei Stützen sei durch mehrere z. B. drei Einzelkräfte P_1, P_2 und P_3 belastet, die zur Längsachse schiefwinklig wirken, aber in einer Ebene liegen. Wie erhält man Gröfse und Richtung der in den Stützen auftretenden Reaktionen?

Lösung. Nach Fig. 36 bestimme man erst mittels des Kräfte- und Seilpolygons die Gröfse, Richtung und Lage von der Resultierenden R aller gegebenen Kräfte. Diese geht durch den Schnittpunkt S der Seilzugseiten

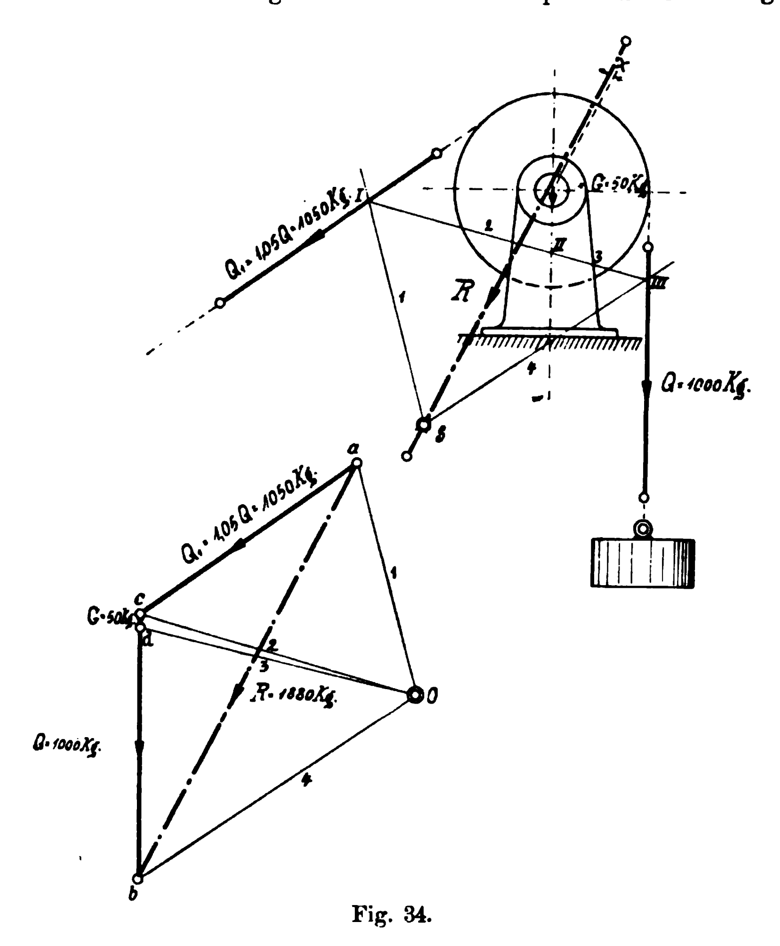


Fig. 34.

1 und 4 und greift im Punkte d der Schwerachse des Trägers an. Das Kräftedreieck def ergibt dann die Horizontalkomponente H und die Vertikalkomponente V, von denen die erstere bei zu geringer Reibung in A und B den Träger über die Stützen hinaus nach links verschieben würde. Um daher die Wirkung von H aufzuheben, empfiehlt es sich, eines der Lager z. B. B, als festes, das andere, A, dagegen als Gleit- oder Rollenlager auszubilden. Der Horizontalkraft H wird nunmehr durch die im Lager B auftretende Reaktion $R_H = H$ das Gleichgewicht gehalten. Die Vertikalkomponente V erzeugt in A und B Vertikaldrücke, deren Gröfsenbestimmung

die bekannte Aufgabe in sich schliefst, für eine Kraft V die durch die gegebenen Punkte A und B gehenden Parallelkomponenten zu suchen. Ist demnach V mit den Ersatzkräften $1'$ und $2'$ herausgezeichnet (Fig. 36 a) und von irgendeinem Punkte S' auf V aus das Seilpolygon $S' u u_1$ konstruiert, so schneidet die zur Schlufslinie $u u_1$ durch Pol O' gezogene Parallele i auf $a'b' = V$ in c die gesuchten Vertikaldrücke ab. Dreht man deren

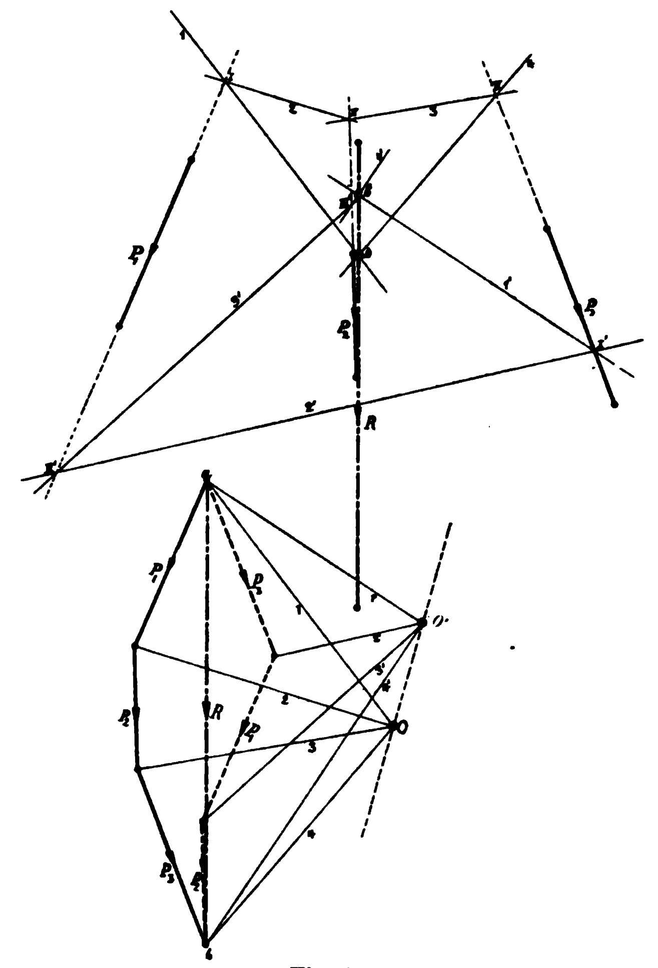


Fig. 35.

Pfeilrichtungen um, so ergeben sich die Vertikalreaktionen R_1 und R_r. In A ist nach Art der Konstruktion bei Vernachlässigung der hier auftretenden geringen Reibung R_1 die wirkliche Reaktion, wogegen in B das R_2 der Gröfse und Richtung nach als Resultierende von R_r und R_H mit Hilfe des Kräftedreiecks oder der Parallelogrammkonstruktion zu bestimmen ist. Der Nachweis für die Richtigkeit und Genauigkeit der Zeichnung ist gegeben, wenn sich die Kraftrichtungen von R_1, R_2 und R in ein und demselben Punkte x schneiden; denn diese Bedingung mufs immer erfüllt sein, wenn

sich drei Kräfte, hier R_1, R_2 und R, das Gleichgewicht halten sollen. — Mit Rücksicht auf letztere Bedingung werden R_1 und R_2 noch etwas schneller gefunden, sobald man R mit der bekannten Richtungslinie von R_1 zum Schnitt in x bringt. Durch die Verbindungslinie xB ist dann auch die Richtung der Reaktion R_2 bestimmt, so dafs nur noch übrigbleibt, nach Fig. 37 ein

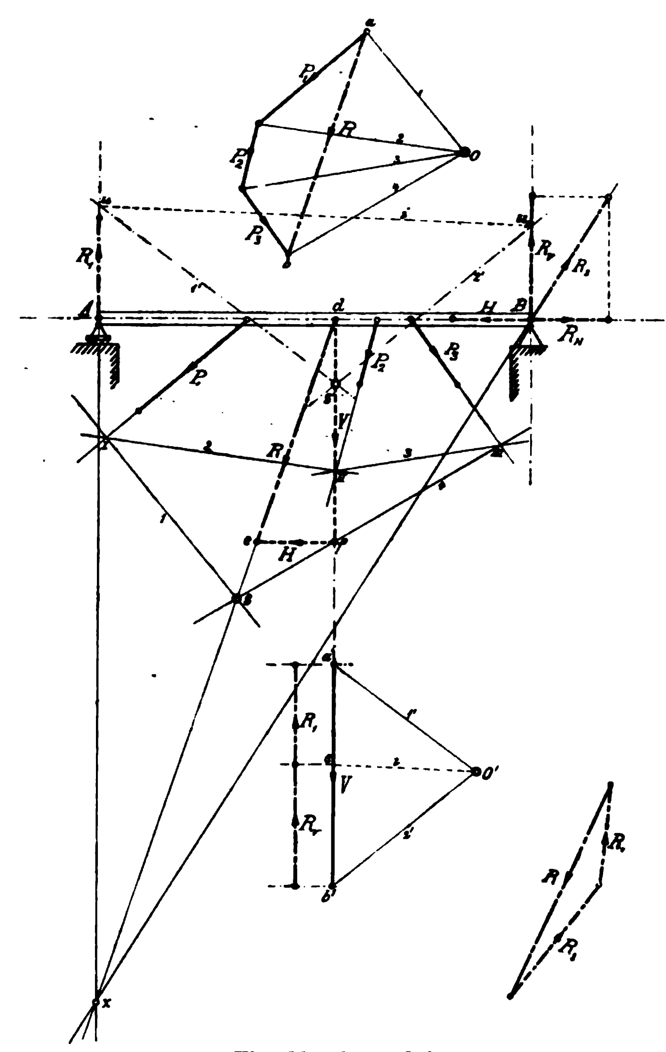


Fig. 36, 36a und 37.

geschlossenes Kräftedreieck aus R, R_1 und R_2 zu bilden, um die Gröfse von R_1 und R_2 festzustellen.

Aufgabe 10.

Bei dem in Fig. 38 dargestellten Drehkran sollen die in den Zapfenlagern A und B auftretenden Horizontalreaktionen ermittelt werden.

Lösung. Ist Q die mittels loser Rolle zu hebende Maximallast, so kann das auf $G = \frac{2}{3} Q$ geschätzte Eigengewicht in der horizontalen Entfernung $\frac{a}{4}$ von der Kransäule wirkend angenommen werden, wenn man das Windwerk in der Nähe der Säule anbringt. Mittels Kräfte- und Seilpolygons findet man dann, daſs die Resultante $R = Q + G$ in der Ent-

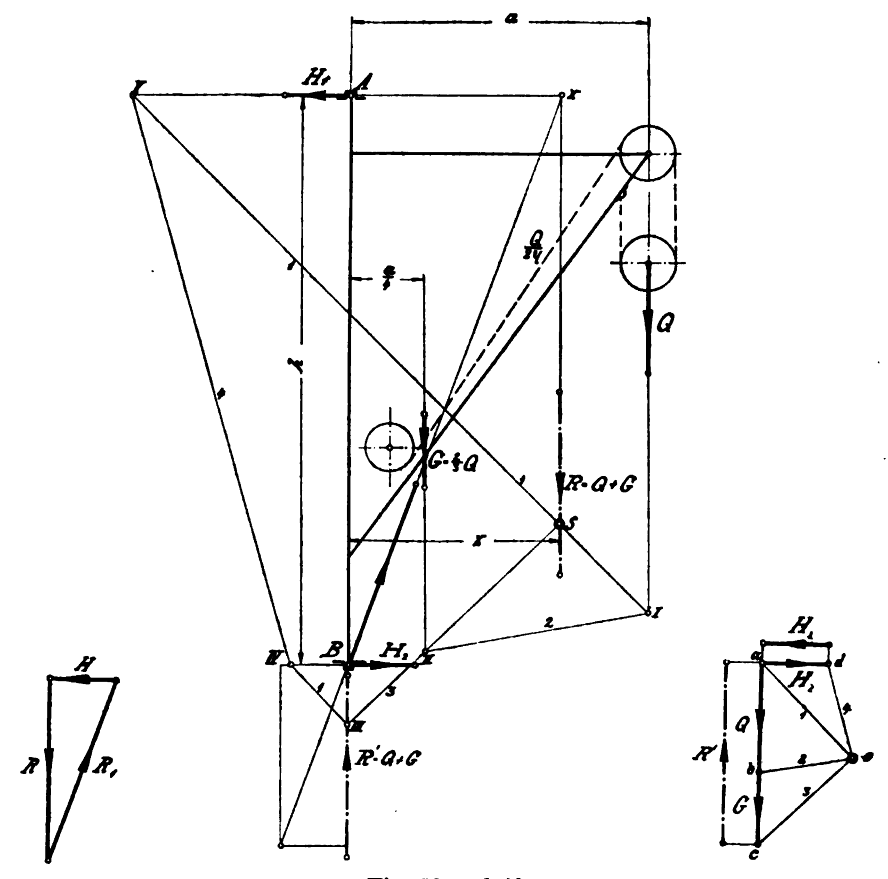


Fig. 38 und 39.

fernung x von der Kransäule angreift. Sie erzeugt im Spurlager B eine gleich groſs, aber entgegengesetzt gerichtete Vertikalreaktion $R' = Q + G$, welche mit R ein Kräftepaar bildet und als solches das Bestreben zeigt, den Kran zu kippen. Dieses Kippbestreben wird aber wieder aufgehoben durch die Wirkung der in A und B vorhandenen Horizontalreaktionen H_1 und H_2, die, gleich groſs und entgegengesetzt gerichtet, ihrerseits ein anderes Kräftepaar bilden. Am Kran halten sich demnach die Kräfte Q, G, R', H_1 und H_2 das Gleichgewicht, von denen Q, G und R' bereits bekannt, H_1 und H_2 dagegen noch zu bestimmen sind. Das geschlossene Kräftepolygon $abcada$ verläuft also von a über b nach c wieder nach a

zurück und setzt sich, der Richtung der Reaktionen H_1 und H_2 entsprechend, bei *a* horizontal fort bis zu dem noch festzulegenden Punkt *d*, um sich, abermals nach *a* zurückkehrend, in diesem Punkte zu schliefsen. Wird der bei Bestimmung der Lage von *R* gewählte Pol *O* beibehalten, so sind 1 und 3, in *S* angreifend, die Ersatzkräfte von *R* und, vom Knotenpunkt *III* ausgehend, 3 und 1 solche von *R'*. Bringt man nun die zu *R* und *R'* gehörigen Strahlen 1 und 1 zum Schnitt *V* mit H_1 resp. Schnitt *IV* mit H_2 und zieht die Verbindungslinie *IV—V*, so ist das Seilpolygon *I*, *II*, *III*, *IV*, *V*, *I* resp. *S III*, *IV*, *V S* ein geschlossenes. In demselben sind dann 1 und 4 die Ersatzkräfte von H_2 und 4 und 1 jene von H_1; folglich ergibt sich die Gröfse von $H_1 = H_2$ aus dem Kräftedreieck *adO* durch Ziehen des Polstrahles 4 ∥ *IV—V*.

Nachdem erkannt, dafs in *A* und *B* gleichgrofse Horizontalreaktionen auftreten müssen und aufserdem noch in *B* eine Vertikalreaktion $R' = Q + G$, so brauchte man nur die Kraftrichtung der in *A* erzeugten Reaktion *H* mit der von *R* zum Schnitt in *x* zu bringen, um auch die Kraftrichtung von $R_1 = \sqrt{R^2 + H^2}$ zu erhalten. Die Gröfsen von *H* und R_1 ergibt dann das in Fig. 39 konstruierte geschlossene Kräftedreieck.

Zweites Kapitel.

§ 6. Bestimmung der Schwerpunktslagen homogener, ebener Flächen.

Stellt man sich die Dicke *d* einer ebenen Platte von überall gleicher Dichte unendlich klein vor, so entsteht eine homogene, materielle Fläche, deren Schwerpunkt weiter nichts ist als der Angriffspunkt des Eigengewichts, d. h. der Resultierenden aller parallel wirkend gedachten Gewichte der einzelnen Flächenteilchen. Bei einer ganz unregelmäfsig, z. B. durch unstetige Kurven, begrenzten Fläche, deren Schwerpunktslage ermittelt werden soll, zerlege man zuerst diese Fläche in möglichst viele, sehr schmale Parallelstreifen, deren Inhalte f_1, f_2 f_3, ... sein mögen. Dann lassen sich diese Einzelflächen mit mehr oder weniger grofser Genauigkeit als Rechtecke auffassen, bei welchen die Schwerpunktslagen bekannt sind. Für die in den Schwerpunkten angreifenden Einzelgewichte $g_1 = f_1 \delta \gamma$, $g_2 = f_2 \delta \gamma$, $g_3 = f_3 \delta \gamma$ . . . . . folgt deshalb wegen der konstanten δ und γ, dafs die Gewichte den Flächen direkt proportional sind. Diese Eigenschaft läfst sich benutzen, um mittelst Kräfteplanes und Seilpolygones den Schwerpunkt der unregelmäfsig begrenzten Fläche zu suchen, indem man nach Fig. 40 die Flächenteilchen nach einem beliebigen Flächenmafsstab wie Parallelkräfte zu einem Polygon zusammensetzt, einen Pol *O* wählt, die Polstrahlen zieht, das Seilpolygon aufzeichnet und dessen erste und letzte Seite zum Schnitt in *S* bringt. Die durch *S* zu den Richtungslinien der Flächenstreifen gezogene Parallele *F* ist dann eine Schwerlinie, auf welcher irgendwo der Schwerpunkt *s* liegen mufs. Dieser wäre jetzt ohne weiteres fixiert, wenn die betrachtete Fläche eine Symmetrieachse, die ja auch immer Schwerachse ist, besäfse; denn der Schnittpunkt beider Schwerlinien wäre der gesuchte Punkt *s*. Ist jedoch, wie in Fig. 40, keine Symmetrieachse vorhanden, so mufs man das vorstehend beschriebene Verfahren unter Annahme einer anderen, z. B. horizontalen Richtung der Flächenstreifen wiederholen, worauf

man eine zweite Schwerlinie *F* und in deren Schnitt mit der zuerst konstruierten den Schwerpunkt *s* erhält. —

Wird bei Zerlegung der gegebenen Fläche die Breite *e* resp. *c* der einzelnen Flächenstreifen konstant gewählt, so sind die Einzelgewichte nicht nur den Flächen, sondern auch den mittleren Ordinaten d_1, d_2, d_3 . . . . . resp. h_1, h_2, h_3 . . . . . direkt proportional. In diesem Falle kann man deshalb, wie ebenfalls in Fig. 40 gezeigt, statt der Flächen auch die Ordinaten in beliebigem Längenmafsstab zu einem Polygon aneinanderreihen und die Schwerlinien konstruieren.

Man ersieht bei Durchführung der Konstruktion nach Fig. 40 ohne weiteres, dafs die graphische Schwerpunktsbestimmung einer unregelmäfsig begrenzten Fläche keinen Anspruch auf grofse Genauigkeit erheben kann. Jedoch begegnet man derselben Ungenauigkeit bei der analytischen Behand-

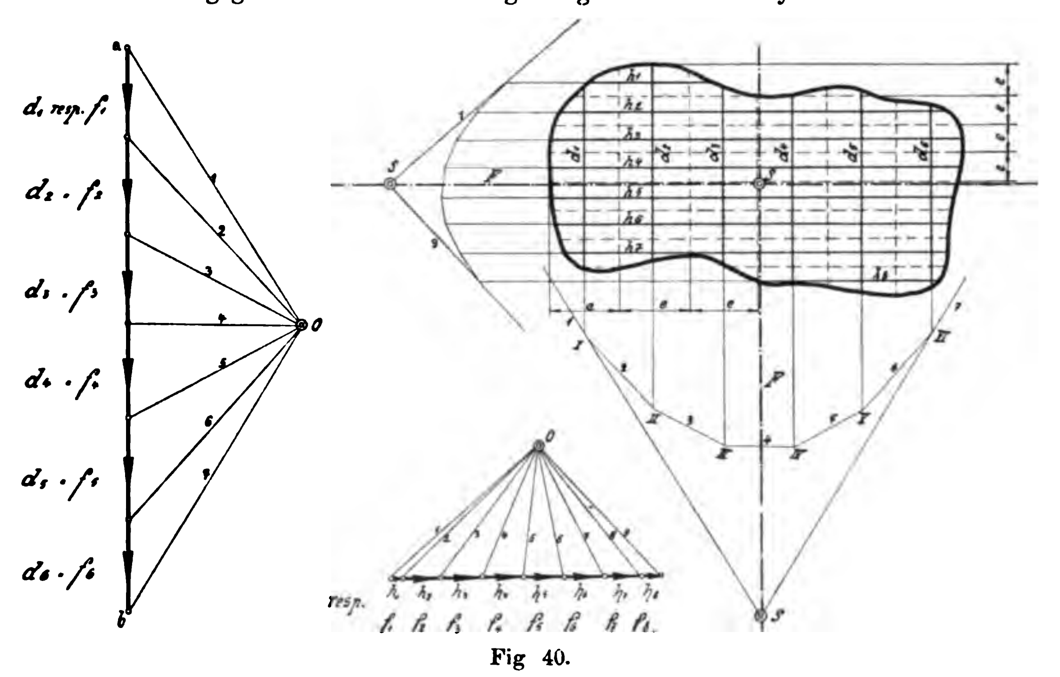


Fig 40.

lung mittels des statischen Flächenmomentensatzes: immer wird in diesem wie in jenem Falle das Resultat um so genauer, je kleiner die einzelnen Flächenstreifen angenommen werden.

Eine ungleich wichtigere Rolle spielen die regelmäfsig begrenzten Flächen. Diese lassen sich meist in derartige Einzelflächen, wie Dreieck, Rechteck, Trapez, Kreis und dergleichen, zerlegen, bei denen nicht nur die Schwerpunktslagen, sondern auch die Flächeninhalte ganz genau bekannt sind. Betrachtet man die Einzelflächen wieder als in den Schwerpunkten angreifende Parallelkräfte, so läfst sich nun mittels des Kräfte- und Seilpolygones die Schwerpunktslage der ganzen Fläche, wie in Fig. 40 gezeigt, praktisch vollkommen genau bestimmen. Eine Abweichung der ermittelten Schwerpunktslage von der mathematischen wird nur durch etwaige Ungenauigkeit beim Zeichnen hervorgerufen und höchstens einen geringen Bruchteil eines Millimeters betragen.

Aufgabe 1.

Es soll die Schwerpunktslage eines ungleichschenkligen Winkeleisens mit den Schenkellängen 75 mm und 50 mm und der Dicke 9 mm bestimmt werden.

Lösung. Nach mafsstäblicher Aufzeichnung des Profiles läfst sich die gegebene Fläche wie in Fig. 41 in zwei Rechtecke von $f_1 = 75 \cdot 9 = 675$ mm² und $f_2 = 41 \cdot 9 \cdot = 369$ mm² Inhalt zerlegen. Die hinzugefügten Flächen *m* und *m* sind dann ungefähr inhaltsgleich der weggelassenen

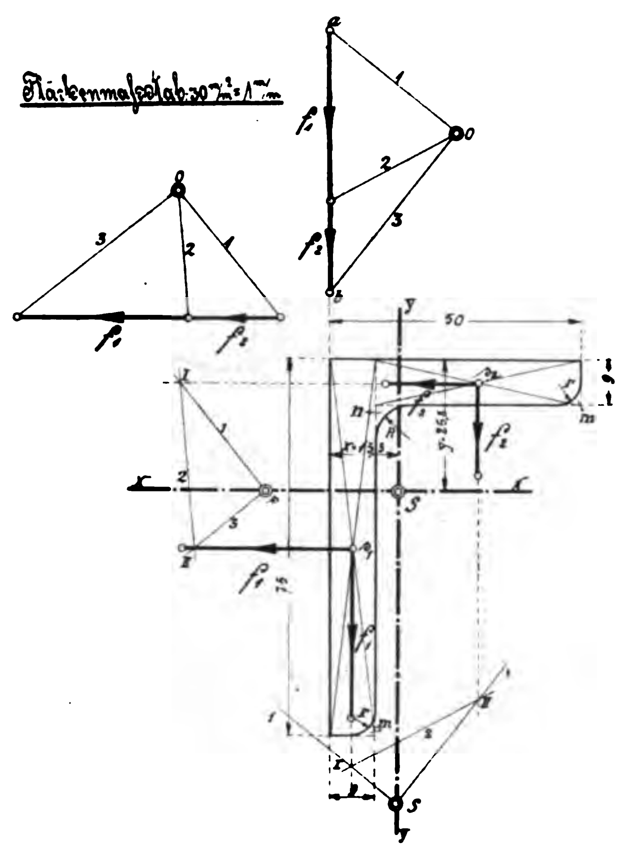


Fig. 41.

Fläche *n*, da $r = \frac{R}{2}$. Wählt man nun als Mafsstab 30 mm² = 1 mm, so dafs f_1 durch eine Gerade von $\frac{675}{30} = 22{,}5$ mm und f_2 durch ebensolche von $\frac{369}{30} = 12{,}3$ mm darzustellen wäre, und konstruiert für zwei verschiedene Richtungen Kräfte- und Seilpolygon, so ergeben sich zwei Schwerlinien, deren Schnittpunkt der gesuchte Schwerpunkt *s* ist. Die Koordinaten von *s* sind dann mit Berücksichtigung des Zeichenmafsstabes direkt abmefsbar mit $x = 13{,}3$ mm und $y = 25{,}8$ mm.

Aufgabe 2.

Für die Berechnung des Schwungmassengewichts ist der Schwerpunkt der in Fig. 42 angegebenen Schwungkranzfläche aufzusuchen.

Lösung. Da die Fläche eine Symmetrieachse $y—y$ besitzt, so ist nur noch eine zweite Schwerlinie $z—z$ zu konstruieren, die um einen Winkel $\alpha = 45^{0}$ gegen die Horizontale geneigt sein möge. Zerlegt man daher die Fläche in die beiden Rechtecke $f_1 = 300 \cdot 25 = 7500$ mm² und $f_2 = 200 \cdot 100 = 20\,000$ mm², deren Schwerpunkte s_1 und s_2 durch den Schnittpunkt der

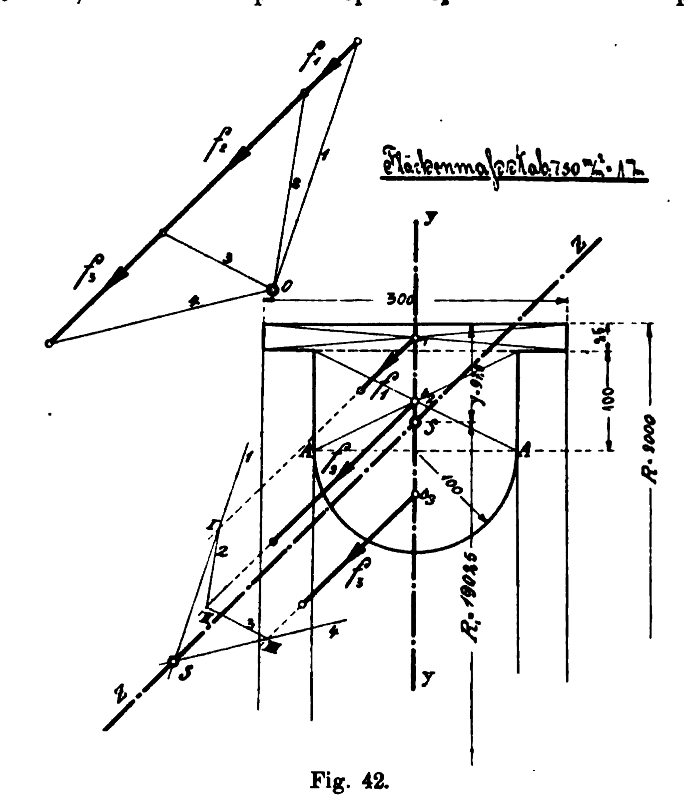


Fig. 42.

Diagonalen gegeben, und in den Halbkreis $f_3 = \frac{100^2 \cdot \pi}{2} = 15\,708$ mm², dessen Schwerpunkt s_3 bekanntlich um $\frac{4}{3} \cdot \frac{r}{\pi}$ von $A—A$ entfernt liegt, so ist bei einem Flächenmaſsstab 750 mm² = 1 mm als eine Gerade aufgefaſst: $f_1 = 10$ mm, $f_2 = 26{,}6$ mm und $f_3 = 20{,}94$ mm. Die Schwerlinie $Z—Z$ bestimmt sich nun in bekannter Weise mittels Kräfte- und Seilpolygones und ergibt, mit $y—y$ zum Schnitt gebracht, den Schwerpunkt s in der Entfernung $y = 97{,}5$ mm von der oberen Flächenbegrenzungslinie.

Ist $F = f_1 + f_2 + f_3 = 43\,208$ mm² die ganze Kranzfläche, $\gamma = 7{,}3$ kg pro Kubikdezimeter das Einheitsgewicht des Guſseisens und $R_1 = 1902{,}5$ mm der Schwerpunktsabstand von der Wellenachse, so berechnet sich das Schwungkranzgewicht mittels der Guldinschen Regel zu:

$$G = F \cdot R_1\, 2 \cdot \pi \cdot \gamma \cdot = 4{,}32 \cdot 19{,}025 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 7{,}3 = \backsim 3770 \text{ kg}.$$

Aufgabe 3.

Gegeben in Fig. 43 der für y—y symmetrische Querschnitt eines Konsollagers. Gesucht Schwerpunkt s.

Lösung. Der Einfachheit halber sind hier die Leerflächen f_2 und f_4 als Parallelkräfte aufgefafst, welche den f_1, f_3, f_5 und f_6 proportionalen Kräften entgegengesetzt wirken. Bei Anfertigung des Kräfte- und Seilpolygones zwecks Bestimmung der zweiten Schwerlinie x—x ist demnach in derselben Weise vorzugehen wie in den Aufgaben 1 und 2 und nur auf die richtige Aneinanderreihung der Flächen und Bezeichnung der Polstrahlen acht zu geben. Man erhält dann $y = 125$ mm.

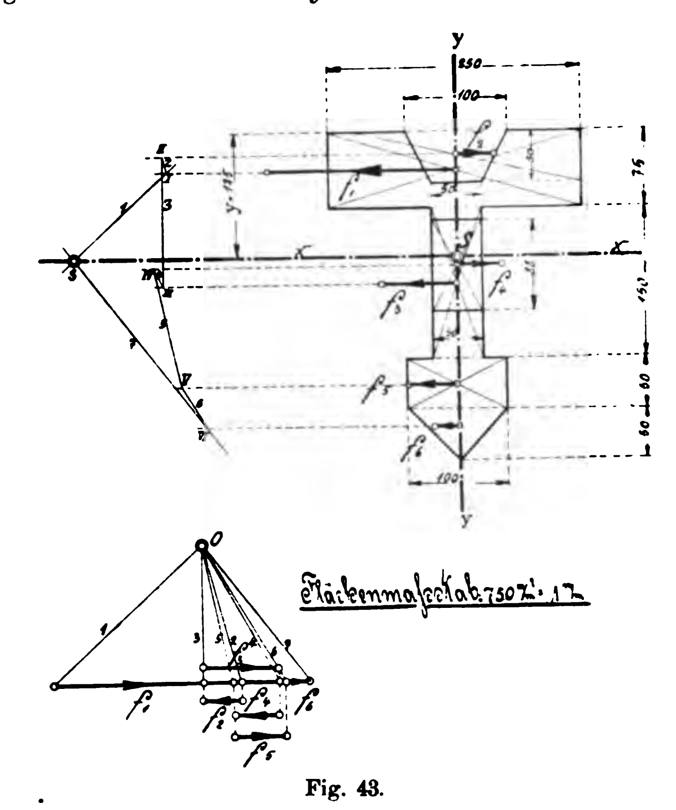


Fig. 43.

Drittes Kapitel.

§ 7. Trägheitsmomente ebener Flächen.

Das Trägheitsmoment einer beliebig begrenzten ebenen Fläche, bezogen auf irgendeine zur Schwerachse parallele Achse $x - x$, ist bekanntlich gegeben durch die Gleichung:

$$J_x = f_1 y_1^2 + f_2 y_2^2 + f_3 y_3^2 + \dots = \Sigma (fy^2) .$$

d. h. durch die algebraische Summe aller Flächenteilchen, multipliziert mit dem Quadrat derer Schwerpunktsabstände von der Achse x—x. Fafst man hierin sämtliche Flächenteilchen als möglichst schmale Streifen auf, die alle

der Achse $x—x$ parallel sind, so ist die zeichnerische Darstellung des Trägheitsmomentes möglich, indem man die einzelnen Streifen f_1, f_2, f_3 .... als Parallelkräfte betrachtet und aus diesen in einem passenden Flächenmafsstabe, wie in Fig. 44, das Kräfte- und Seilpolygon konstruiert. Für irgendeinen Flächenstreifen, z. B. für f_2, läfst sich dann das auf $x—x$ bezogene $i_2 = f_2 y_2^2$ in folgender Weise ersetzen:

Man bringt die zu f_2 gehörigen Seilzugseiten 2 und 3 zum Schnitt e' und e_1' mit $x—x$, so dafs ein Dreieck $II\,e'\,e'_1$ entsteht, welches wegen Parallelismus der Seiten dem Dreieck cc_1O im Kräftepolygon ähnlich ist. Da sich aber die Inhalte ähnlicher Dreiecke wie die Quadrate ihrer Höhen verhalten, so folgt:

$$\frac{II\,e'\,e'_1}{cc_1O} = \frac{y_2^2}{H^2}$$

oder da:

$$cc_1O = f_2 \frac{H}{2}$$

$$\frac{II\,e'\,e'_1}{f_2 \frac{H}{2}} = \frac{y_2^2}{H^2}$$

also:

$$f_2 y_2^2 = II\,e'\,e'_1 \cdot \frac{2\,H^2}{H}.$$

Bezeichnet man das Dreieck $II\,e'\,e'_1$ mit Δ'_2, so ist:

$$f_2 y_2^2 = \Delta'_2 \cdot 2\,H,$$

d. h. das Produkt aus dem Dreieck $II\,e'\,e'_1 = \Delta'_2$ und der doppelten Poldistanz H stellt das Trägheitsmoment des Flächenstreifens f_2, bezogen auf $x—x$, dar. — In analoger Weise ergibt sich für die übrigen Flächenstreifen:

$$f_1 y_1^2 = \Delta'_1\, 2\,H,\ f_3 y_3^2 = \Delta'_3 \cdot 2\,H,\ f_9 y_9^2 = \Delta'_9 \cdot 2\,H,$$

so dafs für die ganze Fläche:

$$J_x = \Delta'_1\, 2\,H + \Delta'_2\, 2\,H + \Delta'_3\, 2\,H + \dots$$

oder:

$$J_x = 2\,H\,\Sigma(\Delta').$$

Hierin ist $\Sigma(\Delta')$ die ganze vom Seilpolygon *I, II, III, IV* .... *IX, X* und den äufsersten Seilzugseiten 1 und 11 mit $x—x$ eingeschlossene Fläche, nämlich:

$$\Sigma(\Delta') = F_1' = I, II, III, IV \dots IX, X, k, i, I,$$

so dafs:

$$J_x = F_1'\, 2 \cdot H,$$

d. h. das Trägheitsmoment der gegebenen Fläche F, bezogen auf die beliebige Achse $x—x$, ist gleich dem Produkt aus der vom Seilpolygon und dessen äufsersten Seiten mit der $x—x$-Achse gebildeten Fläche F_1' und der doppelten Poldistanz $2\,H$.

Hierin ist F_1' natürlich mit dem bei Aufzeichnung des Kräftepolygones gewählten Flächenmafsstab zu multiplizieren, so dafs für die Abmessung:

$$J_x = F_1' \times \text{Mafsstab} \times 2\,H.$$

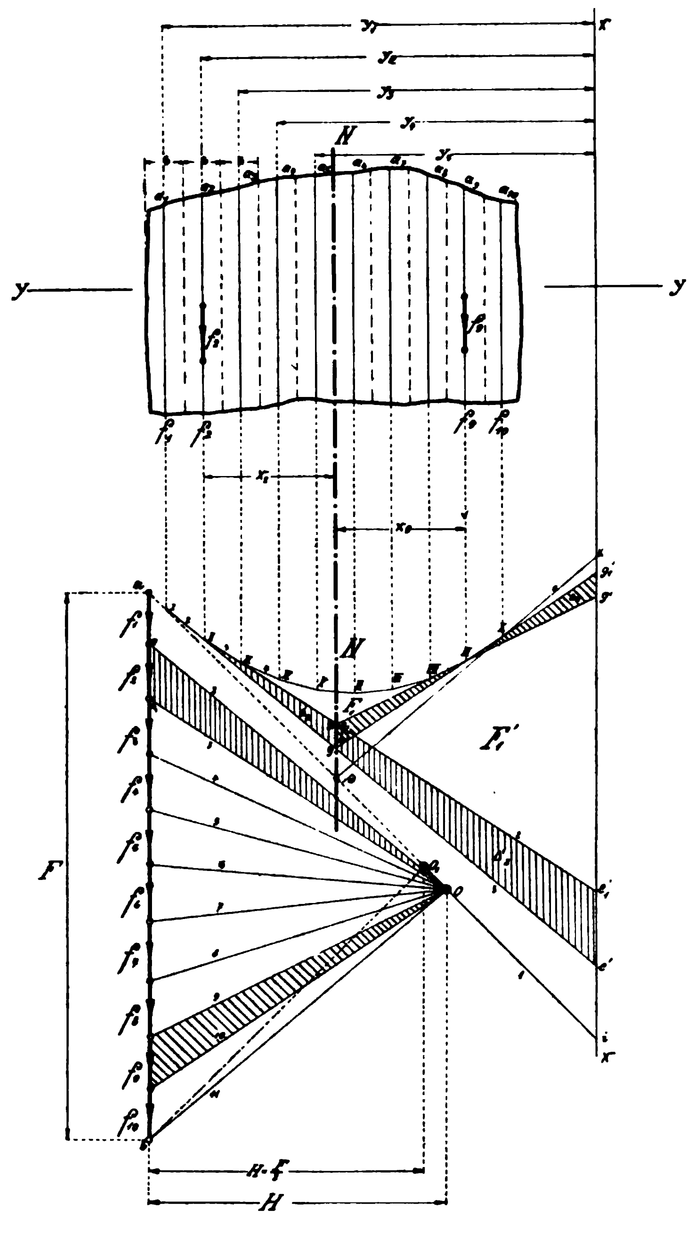


Fig. 44.

Werden die äufsersten Polstrahlen aO und bO unter einem Neigungswinkel $\alpha = 90^0$ gegeneinander gezogen, wobei der Pol O_1 auf der Halbierungssenkrechten der Kraftlinie ab zu liegen kommt, so wird, da:

$$ab = F \text{ und } H = \frac{F}{2},$$

$$J_x = F_1' \, 2 \cdot \frac{F}{2} = F_1' \cdot F.$$

Bei Benutzung dieser Formel gilt für F_1' und F der gleiche Mafsstab. Es ist also für praktische Messungen zu setzen:

$$J_x = F_1' \cdot F \times \text{Flächenmafsstab}.$$

Die Flächenträgheitsmomente spielen bei allen auf Biegung beanspruchten Körpern eine Hauptrolle. Jedoch benötigt man sie meist nur auf die Schwerachse $N—N$ bezogen, die senkrecht zur Biegungsebene $y—y$ steht. In diesem Falle geht man bei der zeichnerischen Bestimmung genau so vor, wie bei der allgemeinen Behandlung gezeigt wurde. Nachdem dann zunächst durch den Schnittpunkt s der beiden äufsersten Seilzugseiten 1 und 11 die Lage der Schwerlinie $N—N$ festgelegt ist, folgt z. B. wieder für den Flächenstreifen f_2:

$$i_2 = f_2 x_2^2.$$

Die zu f_2 gehörenden Seilpolygonseiten 2 und 3 bilden nun mit $N—N$ ein Dreieck $IIee_1$, welches ähnlich ist dem Dreieck cc_1O, so dafs mit Hilfe genau gleicher Ableitung wie vorher durchgeführt:

$$f_2 x_2^2 = IIee_1 \cdot 2\,H = \Delta_2 \cdot 2\,H.$$

In entsprechender Weise folgt weiter:

$$f_1 x_1^2 = \Delta_1 \cdot 2\,H, \; f_3 x_3^2 = \Delta_3 \cdot 2\,H, \; f_9 x_9^2 = \Delta_9 \cdot 2\,H,$$

und für die ganze Fläche:

$$J_N = \Delta_1 \cdot 2\,H + \Delta_2 \cdot 2\,H + \Delta_3 \cdot 2\,H + \ldots . \Delta_{10} \cdot 2\,H = 2\,H\,\Sigma(\Delta).$$

Jetzt ist $\Sigma\,(\Delta)$ die ganze vom Seilpolygon und dessen äufsersten Seiten eingeschlossene Fläche F_1, so dafs:

$$J_N = F_1 \cdot 2\,H$$

d. h. das Trägheitsmoment einer beliebig begrenzten Fläche, bezogen auf die Schwerachse $N—N$, ist gleich dem Produkt aus der vom Seilpolygon und den äufsersten Polygonseiten gebildeten Fläche F_1 und der doppelten Polentfernung $2\,H$.

Zieht man die äufsersten Polstrahlen unter $\alpha = 90^0$ gegeneinander geneigt, so folgt noch:

$$J_N = F_1 \cdot F.$$

In dieser wie in vorstehender Formel darf wieder nicht vergessen werden den Flächenmafsstab zu berücksichtigen.

Für die Berechnung der Fläche F_1 resp. F_1' finden sich in der „Hütte" verschiedene nach dem Grade der Genauigkeit geordnete Formeln, von denen sich hier die an zweiter Stelle angeführte wohl am besten eignet. Man zerlegt F_1 resp. F_1' nach Fig. 45 oder Fig. 46 in eine möglichst grofse, gerade Anzahl Parallelstreifen von der konstanten Breite b und bestimmt durch Halbierung von b deren mittlere Ordinaten $a_1, a_2, a_3 \ldots .$, dann ist z. B.

$$F_1 = a_1 b + a_2 b + a_3 b + \ldots . a_{14} \cdot b$$

oder:

$$F_1 = b\,\Sigma(a).$$

Aufgabe 1.

Für ein Rechteck von der Basis $b = 10$ mm und Höhe $h = 80$ mm ist das Trägheitsmoment, bezogen auf die Schwerachse $N - N$ zu ermitteln, und das Resultat mit dem durch Rechnung erhaltenen zu vergleichen.

Lösung. Wird für die Aufzeichnung der Kraftlinie $ab = f_1 + f_2 + f_3 + \ldots$ der Flächenmafsstab 10 mm² = 1 mm sowie eine Poldistanz $H = 30$ mm gewählt, so ergibt sich nach Fig. 45:

$$F_1 = b\,\Sigma(a) = 5 \cdot 140{,}8 = 704 \text{ mm}^2,$$

so dafs:

$$J_y = F_1 \cdot 2\,H \times \text{Mafsstab}$$

oder:

$$J_y = 704 \cdot 2 \cdot 30 \times 10 = 422\,400 \text{ mm}^4.$$

Nach Rechnung ergibt sich:

$$J_y = \frac{bh^3}{12} = \frac{10 \cdot 80^3}{12} = 426\,666 \text{ mm}^4.$$

Die Differenz ist demnach:

$$426\,666 - 422\,400 = 4266 \text{ mm}^4,$$

d. h. das durch Zeichnung festgestellte Trägheitsmoment ist nur ca. 1 % kleiner als das genaue Rechnungsresultat.

Ähnlich gering bleibt der Fehler, wenn nach Fig. 46 die äufsersten Polstrahlen den Winkel $\alpha = 90^0$ miteinander einschliefsen. Hier ergibt sich:

$$F_1 = b\,\Sigma(a) = 5 \cdot 105{,}4 = 527 \text{ mm}^2$$

und

$$H = \frac{F}{2} = 40 \text{ mm},$$

so dafs:

$$J_y = F_1 \cdot F \times \text{Mafsstab} = 527 \cdot 80 \times 10 = 421\,600 \text{ mm}^4.$$

Die Differenz beträgt demnach:

$$426\,666 - 421\,600 = 5066 \text{ mm}^4,$$

d. h. der in der Zeichnung gemachte Fehler nur knapp 1 ¹/₄ %.

Aufgabe 2.

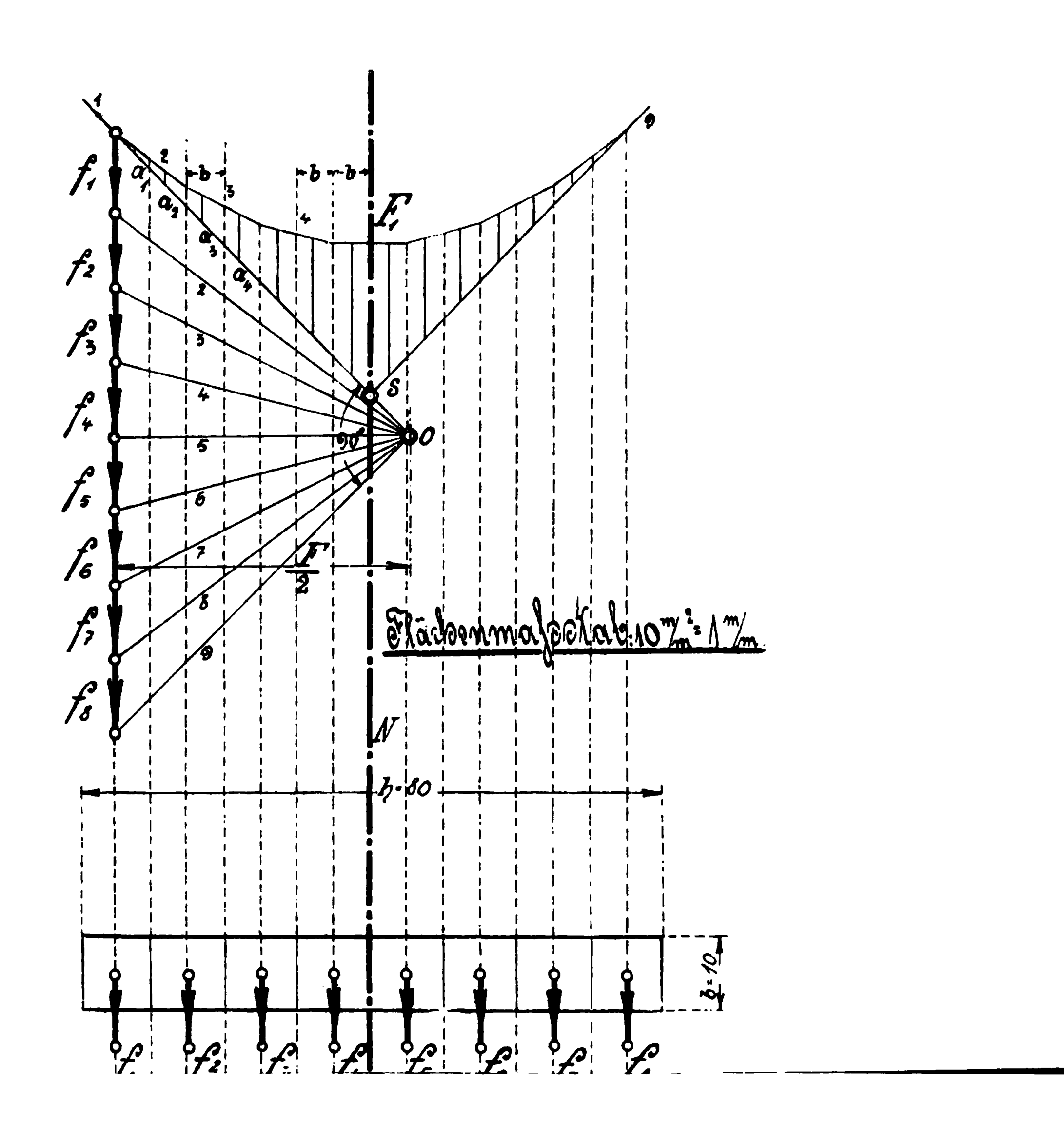
Für den in Fig. 47 mit möglichst geringem Materialaufwand aufgezeichneten Gufsquerschnitt, der in der Ebene $y - y$ auf Biegung beansprucht wird, sollen die auf die äufsersten Zug- und Druckfasern bezogenen Widerstandsmomente bestimmt werden.

Lösung. Nach Einteilung der gegebenen Fläche, beispielsweise in neun Einzelflächen, deren Gröfsen an der Figur beigeschrieben sind, ergibt das im Flächenmafsstab 20 mm² = 1 mm aufgezeichnete Kräfte- und Seilpolygon die Lage der Schwerachse $N - N$ und die zur Berechnung des auf $N - N$ bezogenen Trägheitsmomentes nötige Fläche:

$$F_1 = b\,\Sigma(a) = 5 \cdot 111{,}6 = 558 \text{ mm}^2.$$

Dann ist:

$$J_y = F_1 \cdot 2\,H \times \text{Mafsstab} = 558 \cdot 2 \cdot 25 \times 20 = 558\,000 \text{ mm}^4.$$



S
O
N
90°
h=80
b=10

Da nun N—N in der Entfernung $y = 16$ mm von den äufsersten Zugfasern gefunden wurde und die ganze Querschnittshöhe 64 mm beträgt, so folgt für die Zugseite:

$$W_z = \frac{558000}{16} = 34\,875 \text{ mm}^3$$

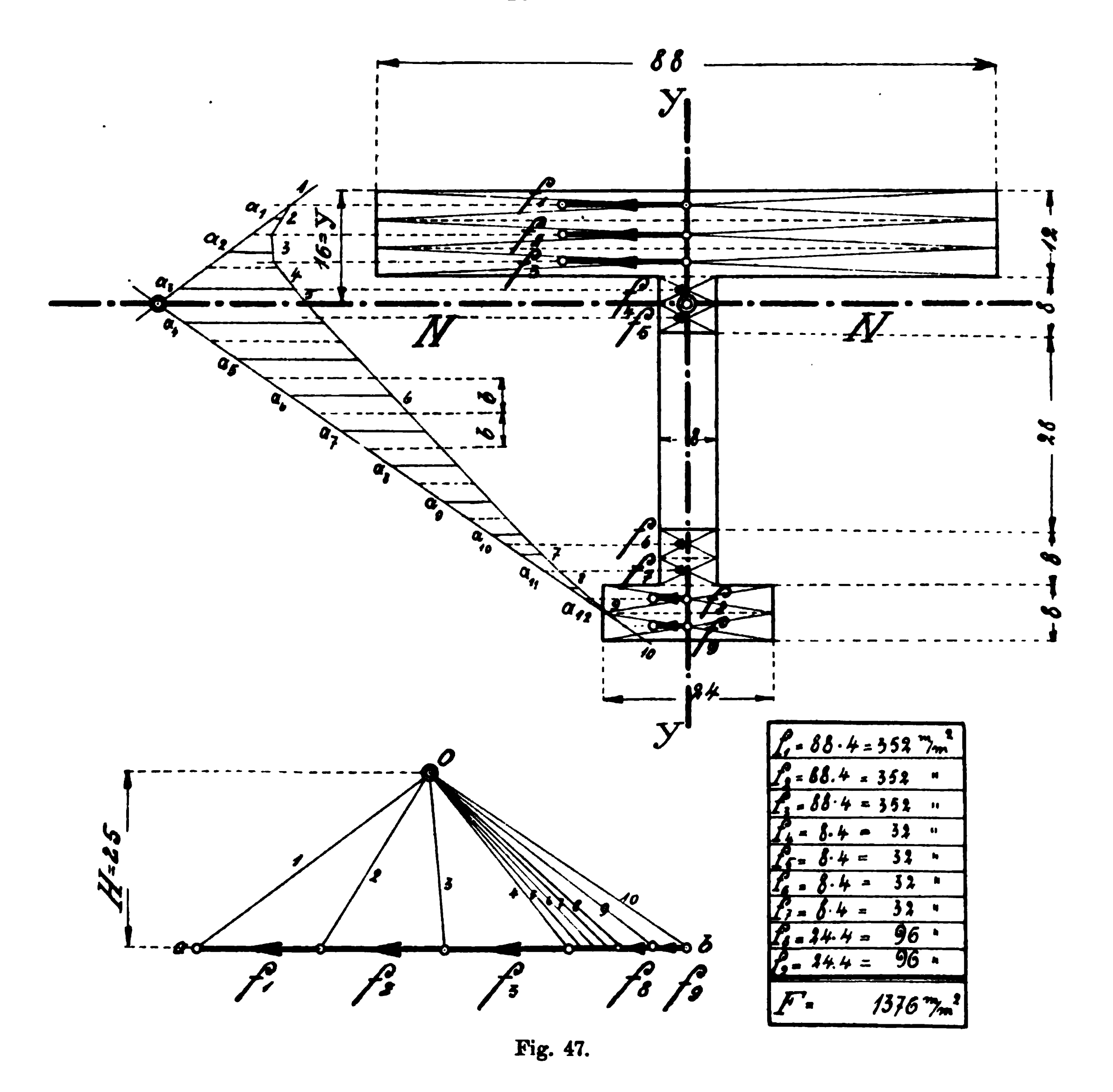


Fig. 47.

und für die Druckseite:

$$W_d = \frac{558000}{64-16} = 11\,625 \text{ mm}^3.$$

Zur Erfüllung der Biegungsgleichung:

$$M_b = W_z \cdot k_z = W_d \cdot k_d$$

müfste in diesem Falle die gröfste Druckspannung das Dreifache der gröfsten Zugspannung betragen:

In dieser wie in voriger Aufgabe führt bei den verhältnismäfsig einfachen Querschnitten die analytische Behandlung schneller zum Ziel. Hier ergibt diese unter Benutzung der Fig. 48:

$$J_x = \frac{88 \cdot 12^3}{12} + 10^2 \cdot 88 \cdot 12 + \frac{8 \cdot 8^3}{12} + \frac{8 \cdot 8^3}{12} + 36^2 \cdot 8 \cdot 8 + \frac{24 \cdot 8^3}{12} + 44^2 \cdot 24 \cdot 8$$

$$J_x = 12\,672 + 105\,600 + 341{,}3 + 341{,}3 + 82\,944 + 1024 + 371\,712$$

$$J_x = 574\,634 \text{ mm}^4.$$

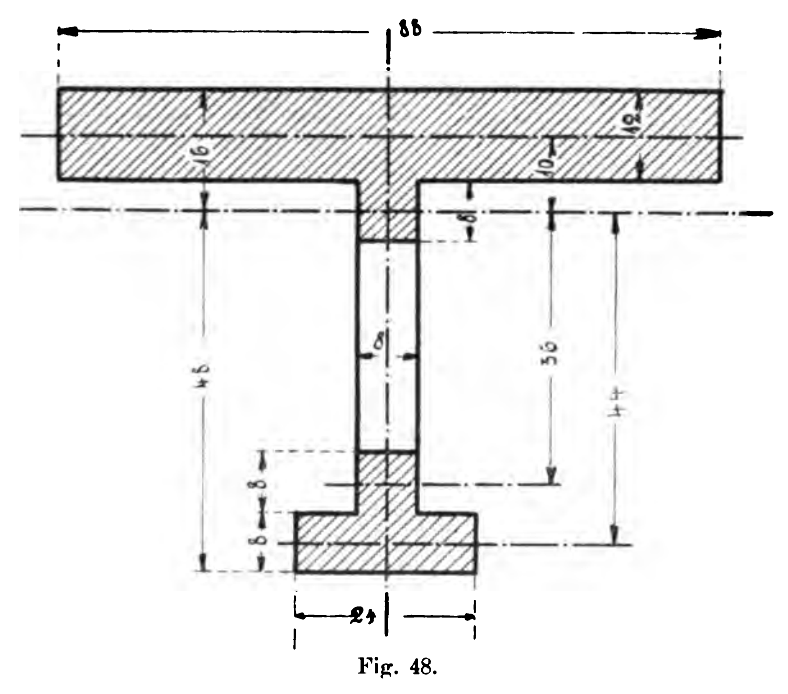


Fig. 48.

Da die Differenz 574 634—558 000 = 16 634 mm⁴ beträgt, so hat das Zeichnungsverfahren einen Fehler von ca. $2^3/_4$ % ergeben. Entsprechend den ebenfalls um $2^3/_4$ % zu kleinen Widerstandsmomenten würden demnach die gröfsten Zug- und Druckspannungen um diesen Betrag gröfser sein müssen.

Die in den Aufgaben nachgewiesene geringe Abweichung der Resultate beider Verfahren voneinander läfst die graphische Methode als sehr brauchbar erscheinen. Es ist jedoch auch direkt einzusehen, dafs man sich dieser wegen des gröfseren Zeitaufwandes nur in den Fällen mit Vorteil bedienen wird, wo bei komplizierteren Querschnitten die analytische Methode lange Rechnungen bedingt und somit die Gefahr in sich schliefst, hier leichter einen Fehler zu machen als bei der graphischen Lösung.

Viertes Kapitel.

Die statischen Momente der Kräfte.

§ 8. Zeichnerische Darstellung des statischen Momentes.

Fällt man von irgendeiner Achse x das Lot l auf die Richtung der gegebenen Kraft P, die in der zur Achse x senkrechten Ebene wirkt, so nennt man das Produkt $Pl = M$ das statische Moment der Kraft P bezogen auf die Achse x. Die Wirkung dieses Momentes äufsert sich je nach der Richtung der Kraft entweder durch eine Rechts- oder eine Linksdrehung, weshalb in der Folge die rechtsdrehenden Momente als positive und die linksdrehenden als negative angenommen werden sollen. In Fig. 49 wäre demnach das Moment von P_1:

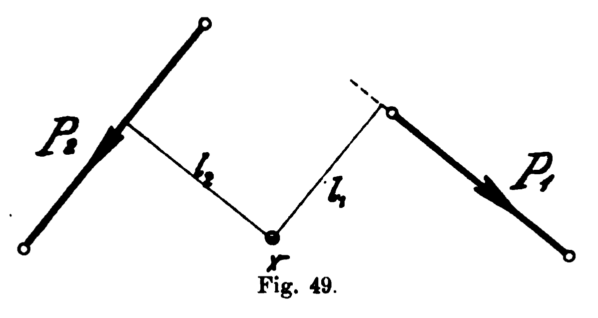


Fig. 49.

$$M_1 = + P_1 l_1 \quad \text{und das von } P_2\text{:} \quad M_2 = - P_2 l_2.$$

Wird hierin P als Kraft in *kg* und l als gerade Strecke in *m* gemessen, so ist die Momenteneinheit das ***kgm***.

Für beliebig viele zerstreut in der Ebene wirkenden Kräfte lassen sich nun deren statischen Momente noch in anderer Weise bestimmen, indem man nach Fig. 50 das Kräfte- und Seilpolygon zu Hilfe nimmt. Hierdurch ist auch die Resultierende R sämtlicher Einzelkräfte gefunden, deren Moment auf irgendeine Achse x bezogen $M = R \cdot l$ sein möge. Zieht man nun durch x eine Parallele zu R und bringt die zu R gehörigen Seilzugseiten 1 und 4 zum Schnitt mit dieser in a_1 und b_1, so entsteht ein Dreieck $S a_1 b_1$, welches wegen Parallelismus der Seiten dem Dreiecke $O a \cdot b$ im Kräftepolygon ähnlich ist. Da sich aber in ähnlichen Dreiecken homologe Seiten wie die zugehörigen Höhen verhalten, so folgt:

$$\frac{a_1 b_1}{a b} = \frac{l}{H}$$

oder da:

$$a_1 b_1 = y \quad \text{und} \quad a b = R,$$

$$\frac{y}{R} = \frac{l}{H}$$

d. h.

$$M = R \cdot l = y \cdot H.$$

In gleicher Weise läfst sich auch das Moment irgendeiner Komponente von R, z. B. $M_1 = P_1 l_1$ auf x bezogen, graphisch darstellen, indem man jetzt durch x eine Parallele zu P_1 zieht und mit dieser die zu P_1 gehörenden Seilzugseiten 1 und 2 in a_1' und c_1 zum Schnitt bringt.

Da nun:

$$\triangle I a_1' c_1 \sim \triangle O a c,$$

so folgt:

$$\frac{a_1' c_1}{a c} = \frac{l_1}{H_1},$$

oder da:

$$a_1' c_1 = y_1 \text{ und } a c = P_1,$$

$$\frac{y_1}{P_1} = \frac{l_1}{H_1},$$

d. h.

$$M_1 = P_1 l_1 = y_1 H_1.$$

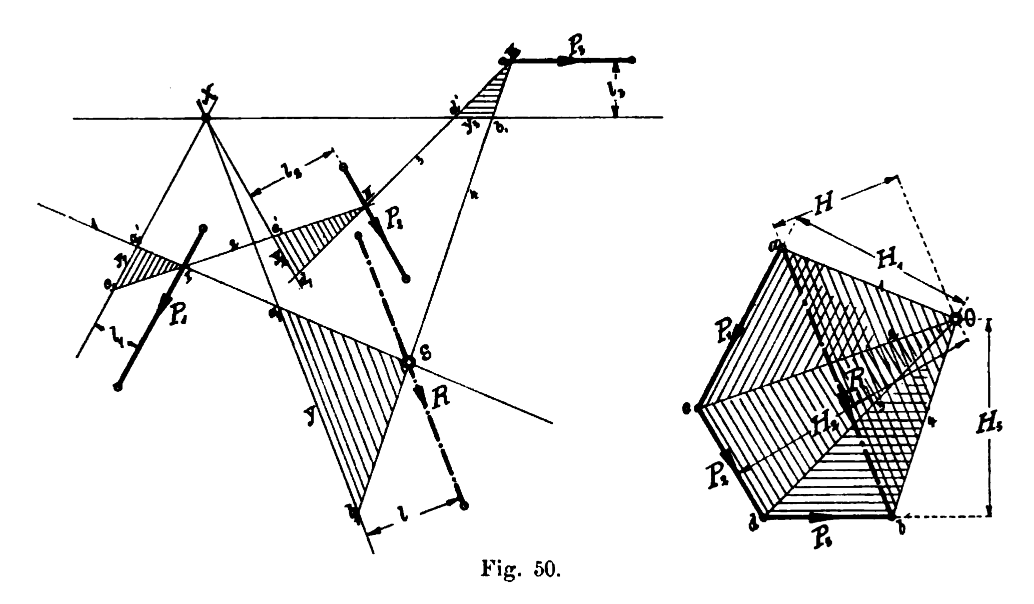


Fig. 50.

Ebenso folgt:

$$M_2 = P_2 l_2 = y_2 H_2$$

und

$$M_3 = P_3 l_3 = y_3 H_3,$$

d. h. das statische Moment irgendeiner Kraft bezogen auf die Drehachse x ist graphisch bestimmt als Produkt aus der Poldistanz H dieser Kraft und der Strecke y, welche von den zur Kraft gehörigen Seilpolygonseiten auf einer durch die Drehachse x parallel zur Kraft gezogenen Geraden abgeschnitten wird.

Da man nur Gröfsen gleicher Art in Verhältnis zueinander setzen kann, so ist in der allgemeinen Gleichung:

$$M = P \cdot l = y \cdot H$$

y als Kraft und H als Länge aufzufassen. Das Produkt $y \cdot H$ bleibt jedoch auch dasselbe, wenn y im Längen- und H im Kräftemafsstab gemessen wird.

Sind die gegebenen Kräfte einander parallel, so vereinfacht sich das allgemeine Verfahren der graphischen Momentenbestimmung noch ganz be-

deutend, wie in Fig. 51 ersichtlich. Hier geht der Kräftezug wieder in eine Kraftlinie über, bei welcher die Gröfse der Resultierenden durch $R = ab$ gegeben ist und die sonst beliebige Poldistanz für sämtliche Kräfte konstant bleibt. Zieht man nun durch den angenommenen Momentenpunkt x eine Achse parallel zu den gegebenen Kräften, so schneiden z. B. die zur Kraft P_1 gehörigen Seilpolygonseiten 1 und 2 auf dieser Achse die Gröfse y_1 ab, die mit 1 und 2 das Dreieck $I a_1 c_1$ bildet. Da dieses ähnlich ist dem Dreieck $O a c$, so gilt die Proportion:

$$\frac{y_1}{P} = \frac{l_1}{H},$$

also:

$$M_1 = P_1 l_1 = y_1 H.$$

Für P_2 sind 2 und 3 die zugehörigen Seilpolygonseiten, welche auf der Momentenachse die Gröfse y_2 abschneiden. Es folgt deshalb analog wie vorher:

$$M_2 = P_2 l_2 = y_2 \cdot H.$$

Fig. 51.

Ebenso ergibt sich:

$$M_3 = P_3 l_3 = y_3 \cdot H, \quad M_4 = -P_4 l_4 = -y_4 \cdot H \text{ und } M = Rl = y \cdot H$$

und hiermit der Satz:

Legt man durch die Drehachse x eine den gegebenen Kräften parallele Gerade, so schneiden die sich auf einer Kraftlinie treffenden Seilpolygonseiten auf dieser Geraden eine Strecke y ab, welche nur noch mit der Poldistanz H zu multiplizieren ist, um das statische Moment der betreffenden Kraft bezogen auf die Achse x darzustellen.

Mit Hilfe der Fig. 51 läfst sich noch leicht die Richtigkeit des in der Mechanik bewiesenen Satzes erklären, dafs das Moment der Resultierenden gleich der algebraischen Summe der Momente der Parallelkomponenten ist. Letztere ergibt sich nämlich zu:

$$M_1 + M_2 + M_3 - M_4 = y_1 H + y_2 H + y_3 H - y_4 H,$$

folglich, da H eine konstante Gröfse ist:

$$M_1 + M_2 + M_3 - M_4 = H(y_1 + y_2 + y_3 - y_4).$$

Nach Fig. 51 ist aber:

$$y_1 + y_2 + y_3 - y_4 = y,$$

so dafs:

$$M_1 + M_2 + M_3 - M_4 = y \cdot H.$$

Ferner ist nachgewiesen, dafs:

$$y \cdot H = R \cdot l = M,$$

folglich:

$$M_1 + M_2 + M_3 - M_4 = M.$$

§ 9. Der Träger auf zwei Stützen durch parallele Einzelkräfte belastet.

Wirken an einem in den Stützen A und B frei aufliegenden, gewichtslos gedachten Träger mehrere, z. B. drei Vertikalkräfte, so üben dieselben auf die Stützen Vertikaldrücke aus, deren Gegendrücke oder Reaktionen ebenfalls als äufsere Kräfte R_1 und R_2 am Träger angreifen. Für die Berechnung des Trägers auf Biegung kommen deshalb tatsächlich fünf einander das Gleichgewicht haltende Kräfte in Frage, von welchen die vorerst noch unbekannten Gröfsen R_1 und R_2 leicht mittels des geschlossenen Kräfte- und Seilpolygons nach Fig. 52 gefunden werden.

Für irgendeinen Querschnitt, z. B. $X—X$, ist nun die Biegungsgleichung gegeben durch:

$$M_x = R_1 x - P_1 (x - a) = W \cdot S_x.$$

Hierin läfst sich mit Hilfe der im vorigen Paragraphen erklärten Momentendarstellung die algebraische Summe aller auf der linken Trägerseite wirkenden äufseren Kräfte, nämlich:

$$M_x = R_1 x - P_1 (x - a)$$

in folgender Weise ausdrücken:

Auf der durch $X—X$ parallel zu den gegebenen Kräften gezogenen Achse wird von den zu R_1 gehörigen Seilpolygonseiten 1 und i die Gröfse y_r abgeschnitten und von den zu P_1 gehörigen Seiten 1 und 2 die Gröfse y_1; es ist demnach:

$$R_1 x = y_r \cdot H$$

und:

$$P_1 (x - a) = y_1 \cdot H,$$

folglich:

$$R_1 x - P_1 (x - a) = y_r \cdot H - y_1 H = H (y_r - y_1).$$

Nach der Zeichnung ist aber $y_r - y_1 = y_x$ die im Seilpolygon von der Schlufslinie i und der Seite 2 abgeschnittene Vertikale, die nach der früher gegebenen Erklärung als Kraft aufzufassen ist. Die Biegungsgleichung in ihrer neuen Form lautet demnach für den Querschnitt $X—X$:

$$M_x = y_x \cdot H = W \cdot S_x.$$

In derselben Weise ergibt sich für irgendeinen anderen Querschnitt $Z—Z$ des prismatischen Trägers:

$$M_z = y_z \cdot H = W \cdot S_z,$$

so dafs aus beiden Gleichungen folgt:

$$\frac{M_x}{M_z} = \frac{y_x}{y_z},$$

d. h.: Infolge der konstanten Poldistanz H sind in allen Trägerquerschnitten die statischen Momente direkt proportional den Ordinaten zwischen Seilpolygon und Schlufslinie. Dementsprechend nennt man die vom geschlossenen Seilpolygon begrenzte Fläche die Momentenfläche des Trägers. In derselben erkennt man, dafs die gröfste Ordinate y_{max} im Querschnitt C erhalten wird,

welcher demnach als gefährlicher Querschnitt zu berechnen wäre mittels der Formel:

$$M_{max} = y_{max} \cdot H = W \cdot S_{max}.$$

Hierin ist die Spannung der meist gezogenen resp. meist gedrückten Fasern gleich der zulässigen Materialbeanspruchung zu setzen, also:

$$S_{max} = k.$$

Es ergibt sich dann:

$$y_{max} \cdot H = W \cdot k$$

und hieraus das Widerstandsmoment des Trägers:

$$W = \frac{y_{max} \cdot H}{k}.$$

Für praktische Rechnungen ist selbstverständlich wieder der Längenmafsstab, in dem der Träger und die Poldistanz entworfen, und der Kräftemafsstab zu berücksichtigen, so dafs:

$$W = \frac{y_{max} \times \text{Kräftemafsstab} \cdot H \times \text{Längenmafsstab}}{k}.$$

Eine weitere Methode, durch Zeichnung ein einfaches Bild der ganzen Trägerbeanspruchung zu gewinnen, ist durch das Schubkraftdiagramm gegeben.

Denkt man sich den Träger in irgendeinem Querschnitt geschnitten, so nennt man in der Festigkeitslehre diejenige an der Schnittstelle anzubringende Vertikalkraft, die allen auf der einen Trägerseite (linken) wirkenden äufseren Kräften das Gleichgewicht hält, die Schubkraft. Dieselbe wäre z. B. für den Querschnitt $X—X$:

$$V_x = R_1 - P_1,$$

denn zur Wiederherstellung des durch den Schnitt gestörten Gleichgewichts mufs die algebraische Summe aller vorhandenen Vertikalkräfte gleich Null sein, also:

$$R_1 - P_1 - V_x = 0,$$

oder:

$$R_1 - P_1 - (R_1 - P_1) = 0,$$

d. h.

$$R_1 - P_1 - R_1 + P_1 = 0.$$

Die in jedem auf Biegung beanspruchten Querschnitt vorhandene Schubkraft beeinflufst im allgemeinen wegen ihrer geringen Gröfse die Festigkeitsrechnung nur verschwindend wenig und wäre nur in den sehr seltenen Fällen zu berücksichtigen, bei welchen die Trägerlänge ein Bruchteil der gröfsten Querschnittsabmessung ist.

Da die Schubkraft nach obigem immer als Resultierende der links vom betrachteten Querschnitt wirkenden Kräfte aufgefafst werden kann, so läfst sich die Aufzeichnung des Diagramms in einfacher Weise vornehmen, indem man z. B. vom linken Trägerende ausgehend die Schubkräfte der Reihe nach auf einer Horizontalen $A_1 B_1$ aufträgt. Hierbei läfst sich auch noch in den Fällen, wo die Stützen A und B an den Trägerenden liegen, wie in Fig. 52, das Kräftepolygon mit benutzen. Liegt dann die Gerade $A_1 B_1$ in einer Ebene mit dem Punkt c, der auf der Kraftlinie die Gröfse von R_1 und R_2 bestimmt, so ist über der Stütze A:

$$V_1 = R_1.$$

weil das unendlich kurze, mit R_1 belastete linke Trägerstück nur dann im Gleichgewicht sein kann, wenn $R_1 - V_1 = 0$ wird.

Diese Schubkraft $V_1 = R_1$ bleibt bis zum Querschnitt D konstant, da keine neue äufsere Kraft hinzukommt. In D selbst tritt P_1 hinzu, so dafs hier:

$$V_2 = R_1 - P_1.$$

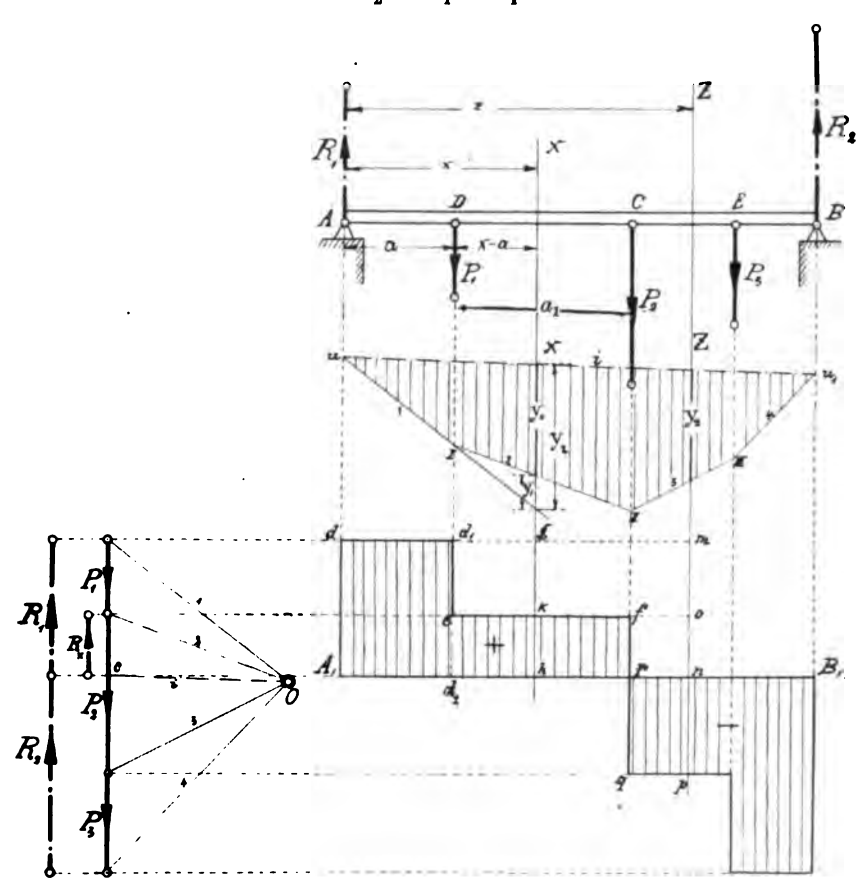


Fig. 52.

Auch V_2 behält in allen Querschnitten zwischen D und C seinen Wert und wird erst in C durch Hinzutreten von P_2 übergehen in:

$$V_3 = R_1 - P_1 - P_2.$$

Man erkennt nun aus der Figur, dafs V_3 negativ sein mufs, weil die Nullinie $A_1 B_1$ der Schubkräfte geschnitten wurde und V_3 unter dieser Linie liegt. Alle weiteren Schubkräfte bleiben bei dem gewählten Beispiel negativ. V_3 behält ihre Gröfse bis zum Querschnitt E und geht hier über in die bis zur Stütze B konstante Schubkraft:

$$V_4 = R_1 - P_1 - P_2 - P_3 = R_2.$$

Hat man auf diese Weise das Diagramm der Schubkräfte verzeichnet und faſst man nun wieder das statische Moment in seiner ursprünglichen Form als Kraft mal Hebelarm auf, so kann dieses Produkt offenbar als Rechteck betrachtet werden, in welchem die Höhe als Kraft, die Basis als Hebelarm gemessen wird.

Im Querschnitt D wäre also:

$$M_D = R_1 a = \square\, A_1 d d_1 d_2,$$

und für Querschnitt $x-x$:

$$M_x = R_1 x - P_1 (x-a) = \square\, A_1 dgh - \square\, d_1 gke,$$

oder da:

$$\square\, A_1 dgh - \square\, d_1 gke = \text{Fläche } A_1 dd_1 ekh,$$
$$M_x = \text{Fläche } A_1 dd_1 ekh,$$

d. h. das Moment M_x ist gleichwertig dem Teil des Schubkraftdiagrammes, welcher bis an die Vertikale durch $X-X$ reicht.

In entsprechender Weise folgt für Querschnitt $Z-Z$:

$$M_z = R_1 z - P_1 (z-a) - P_2 [z-(a+a_1)]$$

oder:

$$M_z = \square\, A_1 dmn - \square\, d_1 moe - \square\, fo \cdot p \cdot q.$$

Da hierin:

$$\square\, fopq = \square\, fonr + \square\, rnpq,$$

so folgt:

$$M_z = \square\, A_1 dmn - \square\, d_1 moe - \square\, fonr - \square\, rnpq,$$

oder da:

$$\square\, A_1 dmn - \square\, d_1 moe - \square\, fonr = \text{Fläche } A_1 dd_1 efr,$$
$$M_z = \text{Fläche } A_1 dd_1 efr - \square\, rnpq.$$

Untersucht man noch weitere Querschnitte, so läſst sich auch hier in ähnlicher Weise wie für $X-X$ und $Z-Z$ nachweisen, daſs das Biegungsmoment irgendeines Trägerquerschnittes durch den Inhalt desjenigen Teiles des Schubkraftdiagrammes dargestellt wird, welcher bis an den betrachteten Querschnitt reicht. Fäſst man hierbei immer die linke Trägerseite ins Auge, so ist die über der Basis $A_1 B_1$ liegende Schubkraftfläche als positiv, die darunter liegende als negativ anzusehen. Man erkennt deshalb ohne weiteres aus der Fig. 52, daſs die relativ gröſste Schubkraftfläche für den Querschnitt C erhalten wird, daſs also hier das Maximalmoment vorhanden ist. Da aber auch in C die Schubkraft ihre Richtung wechselt und aus einer positiven Kraft in eine negative übergeht, so läſst sich der wichtige Satz aussprechen:

Beim Richtungswechsel der Schubkräfte tritt ein Maximalmoment auf.

Diese Erkenntnis läſst es vorteilhaft erscheinen, neben dem geschlossenen Seilpolygon als Momentenfläche immer noch die Aufzeichnung des Schubkraftdiagrammes zur Kontrolle der Lage des gefährlichen Querschnittes vorzunehmen, und zwar empfiehlt sich dieses namentlich bei komplizierteren Belastungsfällen, um das y_{max} des Seilpolygons mit Sicherheit festzustellen. Für die Folge soll aber dieses Verfahren der Übung halber bei allen Betrachtungen durchgeführt werden.

Verschiebt man beide oder auch nur eine Trägerstütze, z. B. B, nach innen, so wird nach Fig. 53 das Bild der Trägerbeanspruchung ein ganz anderes. Bei dem angenommenen Belastungsfall zeigt dann das Seilpolygon als Biegungsmomentenfläche sowohl für den Querschnitt C als auch für B ein y_{max}, und zwar ist:

$$y_{max_B} > y_{max_C}.$$

Beide Querschnitte sind also gefährliche; jedoch ist die Trägerberechnung für B durchzuführen, weil von den beiden relativen Maximalmomenten M_C und M_B das letztere das absolut gröfste ist. Man erhält also hier:

$$M_B = M_{max} = y_{max} \cdot H = W \cdot k.$$

Aus der Momentenfläche läfst sich noch auf die Form der Durchbiegungslinie der Trägerachse, der sogenannten elastischen Linie, schliefsen. Da nicht nur an den Enden A und D, sondern auch im Querschnitt x ein Nullmoment vorhanden, weil $y = 0$, so ist dieses ein Zeichen, dafs die links von x wirkenden Kräfte R_1, P_1 und P_2 den Träger nach unten durch-

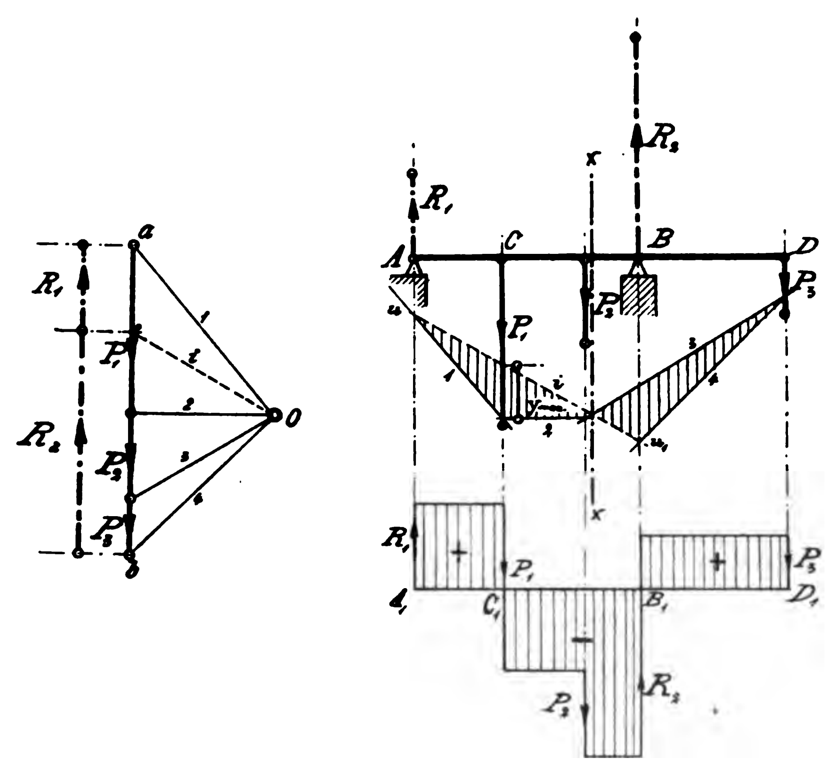


Fig. 53.

bauchen, und dafs von x ab die rechts angreifenden Kräfte R_2 und P_3 eine Durchbiegung im entgegengesetzten Sinne herbeiführen. Man nennt deshalb den im spannungslosen Querschnitt x liegenden Punkt der elastischen Linie einen Wende- oder Inflexionspunkt.

Die Querschnitte A, D und x sowie C und B, in denen Null- resp. Maximalmomente auftreten, werden gleichfalls durch das Schubkraftdiagramm gefunden, indem man sich der aus demselben abgeleiteten Folgerung erinnert.

Sehr häufig kann auch ein Träger eine indirekte Belastung durch Einzelkräfte erfahren, wie dies z. B. in Fig. 54 und Fig. 55 ersichtlich ist. Hier erzeugen die gegebenen P resp. P_1 und P_2 mit Hilfe von Zwischenträgern auf die I-Querträger Stützdrücke, die für den Träger $A\,B$ als direkt wirkende Einzelkräfte anzusehen sind. In Fig. 54 mögen P' und P'' diese

Stützdrücke sein, deren Gröfsen sich mittels des Kräfte- und Seilpolygones ergeben, indem die durch O zur Schlufslinie III gezogene Parallele i_1 auf der Kraftlinie von P die Strecken $ac = P'$ und $bc = P''$ abschneidet. Die P' und P'' gleich grofsen Gegendrücke R' und R'' bilden mit P ein Gleichgewichtssystem und beanspruchen den Zwischenträger auf Biegung. Für die Berechnung dieses Trägers würde also das geschlossene Seilpolygon $IIIS$ dienen. Sieht man von dem Einflufs der I-Trägerflanschen ab, so sind jetzt P' und P'' die den Träger AB direkt belastenden Kräfte, die sich mit den in A und B erzeugten Stützgegendrücken R_1 und R_2 im Gleichgewicht befinden. Es wird also bei Berechnung des Längsträgers AB die einfache Aufgabe zu lösen sein, für die Kräfte P', P'', R_1 und R_2 das

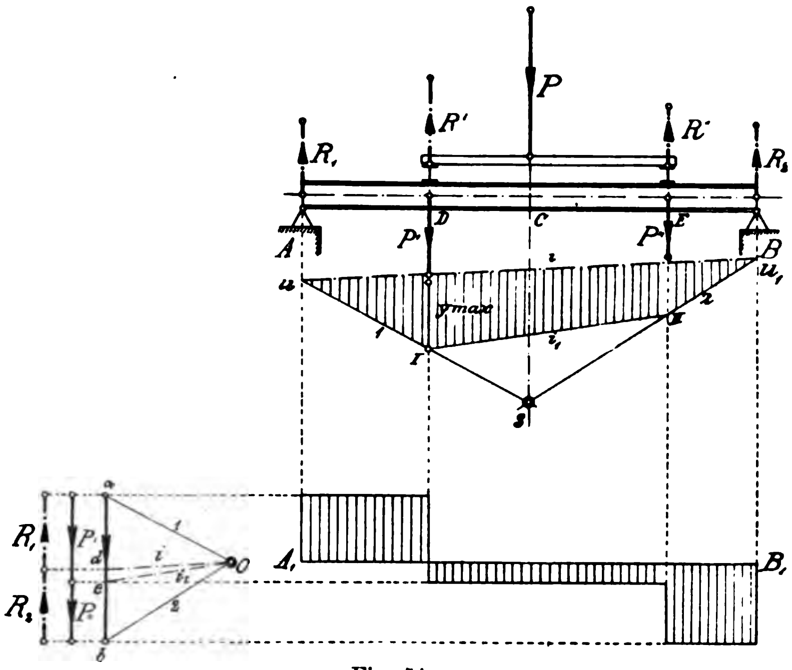


Fig. 54.

geschlossene Seilpolygon zu konstruieren. Da 1 und i_1 Ersatzkräfte von P' und 2 und i_1 solche von P'', so läfst sich das bereits für P, R' und R'' konstruierte Polygon $IIIS$ benutzen. Man braucht nur 1 und 2 noch zum Schnitt u und u_1 mit den bekannten Richtungslinien von R_1 und R_2 zu bringen und u mit u_1 zu verbinden. Zieht man dann zu uu_1 der erhaltenen Biegungsmomentenfläche $uIIIu_1$ durch den Pol O die Parallele i, so schneidet diese noch auf der Kraftlinie von $P = P' + P''$ die Gröfsen $R_1 = ad$ und $R_2 = bd$ ab.

Ganz genau, wie vorstehend erörtert, behandelt man den Fall Fig. 55, indem man zunächst die durch P_1 und P_2 erzeugten Stützdrücke P_1' und P_1'' und P_2' und P_2'' bestimmt, die für den Träger AB als Einzelkräfte aufzufassen sind. Mit teilweiser Benutzung der vorhandenen Seilzugseiten erhält man dann $uIIIIIIu_1$ als Biegungsmomentenfläche des Trägers und R_1 und R_2 als Stützreaktionen in A und B.

Betrachtet man nun das geschlossene Seilpolygon $u\,I\,II\,III\,u_1$ in Fig. 55 resp. auch $u\,I\,II\,u_1$ in Fig. 54 etwas genauer, so ist festzustellen, dafs in den Querstützebenen C, D und E resp. D und E bei direkter und indirekter Belastung die gleichen Momente auftreten. Auch ist ohne weiteres zu erkennen, dafs das zu den gegebenen Kräften P_1 und P_2 resp. P gehörige Seilpolygon $u\,I\,II\,III\,u_1$ resp. $u\,I\,II\,u_1$ sofort gefunden wird, wenn man diese Kräfte als direkt wirkend ansieht, die zugehörigen Seilpolygone $u\,S\,S_1\,u_1$ resp. $u\,S\,v_1$ konstruiert und die Schnittpunkte I, II und III resp. I und II der Richtungslinien der Querträgerdrücke mit den entsprechenden Seilpolygonseiten miteinander verbindet. Die abgeschnittenen Polygone $I\,S\,II$

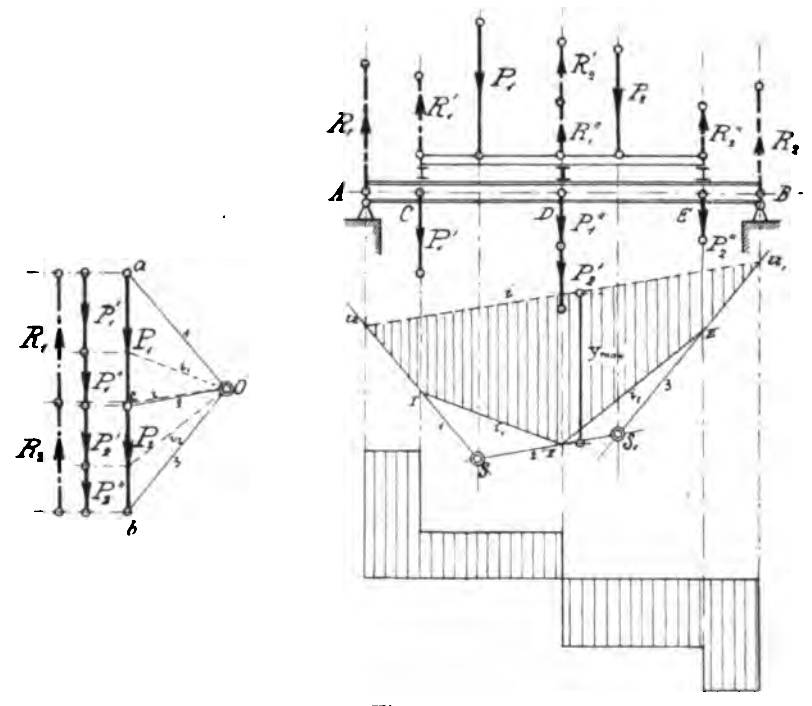


Fig. 55.

und $II\,S_1\,III$ resp. $I\,S\,II$ dienen dann zur eventuellen Berechnung der oberen Träger. Zieht man noch im Kräftepolygon durch den Pol O die Parallelen i_1 und i_2 resp. i_1, so schneiden diese auf P_1 und P_2 resp. P die wirklichen Trägerdrücke P_1' und P_1'' und P_2' und P_2'' resp. P' und P'' ab, mit Hilfe welcher die Schubkraftdiagramme, wie in Fig. 55 und Fig. 54 erkennbar, aufgezeichnet werden können.

§ 10. Der Träger auf zwei Stützen mit gleichmäfsig verteilter Belastung und Einzelkräften.

Denkt man sich die über einen Teil des Trägers gleichmäfsig verteilte Last Q aus einer Anzahl, z. B. 4 nebeneinander liegenden Einzellasten q bestehend, die wieder unter sich gleich grofs sein mögen, so läfst sich

nach Fig. 56 in bekannter Weise das Kräfte- und Seilpolygon konstruieren, wobei wieder die durch den beliebigen Pol O parallel zur Schlufslinie $u u_1$ gezogene Gerade i auf der Kraftlinie $Q = \Sigma(q)$ die Reaktionen R_1 und R_2 abschneidet. Bei der Aufzeichnung des Schubkraftdiagrammes würden dann

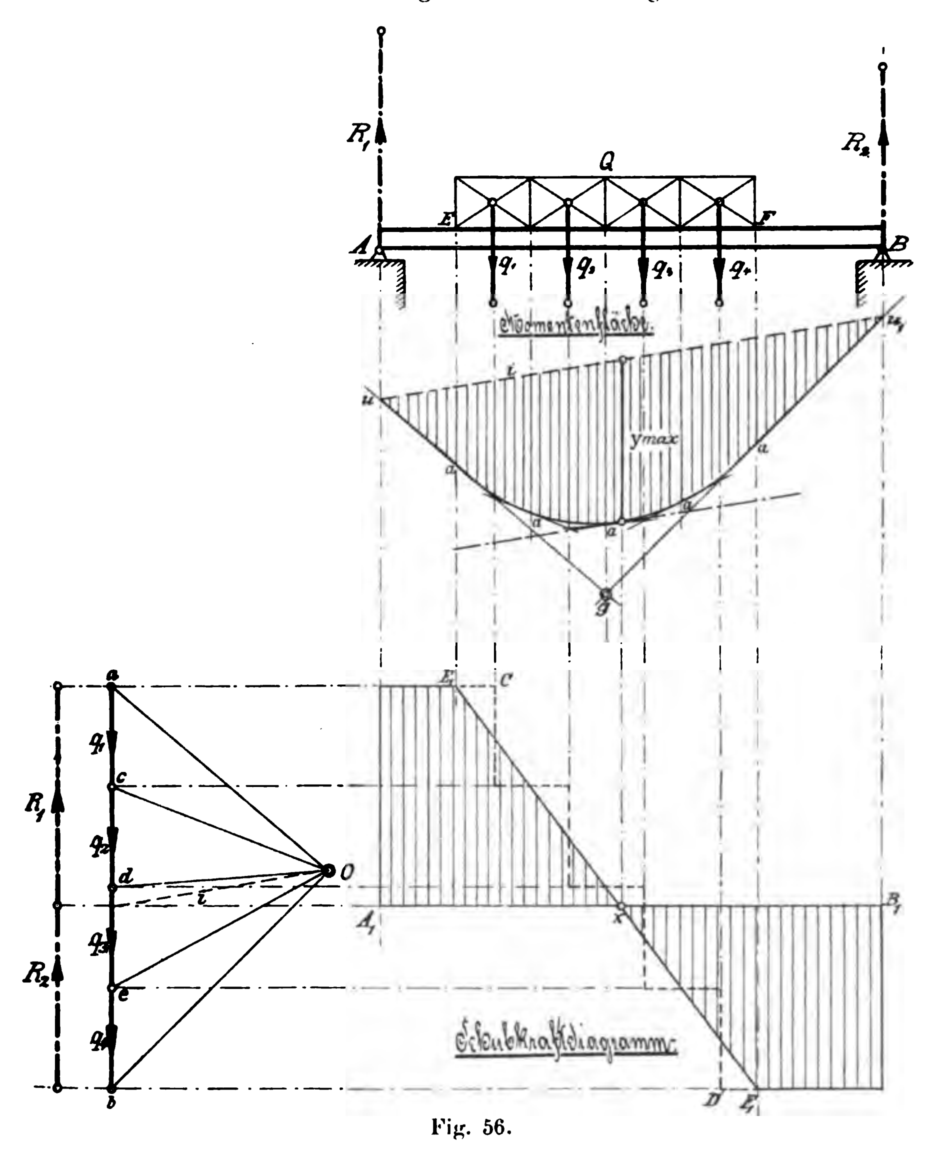


Fig. 56.

die Schubkräfte von A_1 bis C resp. D bis B_1 konstant sein und von C bis D durch eine treppenförmige Linie begrenzt werden.

Dem wirklichen Belastungsfall entsprechend wird nun offenbar die Genauigkeit der Konstruktion um so gröfser, je gröfser die Anzahl n der Einzellasten q, je kleiner deshalb das q selbst ist. Mit wachsendem n wird

aber auch die Anzahl der Seilpolygonseiten zwischen den Grenzebenen $E - E_1$ und $F - F_1$ immer gröfser und schliefslich unendlich grofs, wenn man sich unendlich viele, verschwindend kleine Einzellasten unendlich nahe nebeneinander gelegt denkt. Dann geht das Seilpolygon zwischen $E - E_1$ und $F - F_1$ in eine Seilkurve (Parabel) über, für welche das mit einer endlichen Anzahl von Einzellasten entworfene Seilpolygon das Tangentenpolygon ist. Bei der in Fig. 56 gemachten Annahme ergeben sich deshalb direkt fünf Punkte dieser Kurve, indem man die vertikalen Begrenzungslinien a der Einzellasten in das Tangentenpolygon hineinlotet. Mit der Voraussetzung unendlich vieler, verschwindend kleiner Einzellasten nimmt auch die Schubkraft in E_1 von einem + Maximum ($+ R_1$) gleichmäfsig ab und geht in F_1 in ein – Maximum ($- R_2$) über. Die treppenförmige Linie CD ist demnach durch eine Gerade $E_1 F_1$ zu ersetzen, deren Schnittpunkt x mit der Nulllinie $A_1 B_1$ den gefährlichen Trägerquerschnitt festlegt, so dafs durch Hinaufloten von x in die Momentenfläche das y_{max} abgemessen werden kann. Übrigens könnte man auch ohne Schubkraftdiagramm das y_{max} fixieren, indem man an die Seilkurve eine Parallele zur Schlufslinie $u v_1$ legt. Die durch den Berührungspunkt dieser Tangente mit der Kurve gelegte Vertikale schneidet dann im Seilpolygon das y_{max} ab.

Eine einfache Konstruktion der Seilkurve als Parabel zeigt noch Fig. 57, in welcher die Belastung Q über die ganze Trägerlänge gleichmäfsig verteilt zu denken ist. Da hier die Stützreaktionen ohne weiteres mit $R_1 = R_2 = \frac{Q}{2}$ gegeben sind, so kann auch von vornherein die Schlufslinie $u v_1$ als Horizontale verzeichnet werden. Man betrachtet einfach das Q als eine im Schwerpunkte angreifende Einzellast, zu welcher das Seilpolygon $u I v_1$ gehört. Teilt man nun die Seiten $u I$ und $I v_1$ in eine gleiche Anzahl unter sich gleicher Teile mit der angegebenen Numerierung und verbindet die gleichlautenden Ziffern durch Gerade, so entsteht ein Tangentenpolygon, dessen Einhüllende die gesuchte Parabel ist. Selbstverständlich wird diese um so genauer, je gröfser die Anzahl der Teile gewählt wurde. Der gefährliche Querschnitt liegt, wie auch das Schubkraftdiagramm bestätigt, in der Trägermitte.

Ist ein Träger aufser einer oder mehreren gleichmäfsig verteilten Lasten noch durch Einzelkräfte beansprucht, wie z. B. in Fig. 58, so ist dem Studierenden zu empfehlen, die Momentenflächen für gleichmäfsige Lasten und Einzelkräfte zunächst getrennt aufzuzeichnen. Legt man hierbei die Pole O und O_1 der beiden Kräftepolygone auf verschiedene Seiten der Kraftlinien ab und $a_1 b_1$ bei gleicher Poldistanz H, so ergibt sich das in jedem Trägerquerschnitt auftretende Gesamtmoment durch Multiplikation der algebraischen Summe der einzelnen y mit der gemeinsamen Polentfernung H. Hierbei kann das Doppeltabgreifen zur Bestimmung von $y = y_1 + y_2$ noch vermieden werden, indem man eine Kombination beider Momentenflächen vornimmt und die resultierende Momentenfläche konstruiert. Dies geschieht z. B. durch Veränderung der Lage des Poles O_1 der Einzelkräfte. Die Momentenflächen lassen sich nämlich direkt aneinanderlegen, wenn ihre Schlufslinien $u v_1$ und $u' v_1'$ zusammenfallen, wenn also durch den Punkt c_1 der Kraftlinie $a_1 b_1$ zu $u v_1$ eine Parallele gezogen wird. Pol O_1 rückt dadurch bei gleicher Poldistanz H in die Lage O_2 und die neuen Polstrahlen sind $1''$, $2''$ und $3''$.

Zu beachten ist noch, dafs in der Momentenfläche für die gleichmäfsig verteilten Lasten immer innerhalb der Begrenzungsebenen dieser Lasten, im Seilpolygon die Parabel zu konstruieren ist. Die Zeichnung läfst dann

erkennen, dafs das y_{max} nicht absolut sicher abgreifbar ist, so dafs sich hier die Zuhilfenahme des Schubkraftdiagrammes ganz besonders empfiehlt. Man entwerfe also dieses Diagramm für die stetigen Lasten und Einzelkräfte getrennt und vereinige sie durch algebraische Addition der Ordinaten

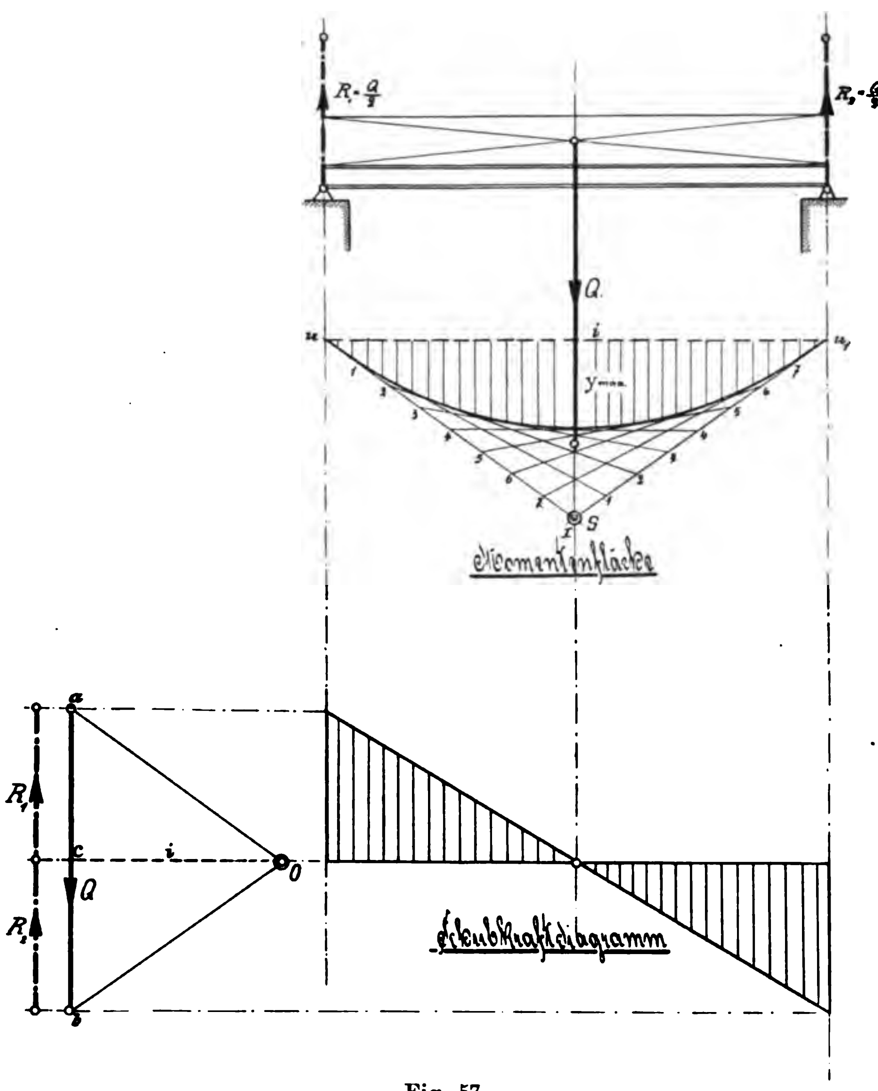
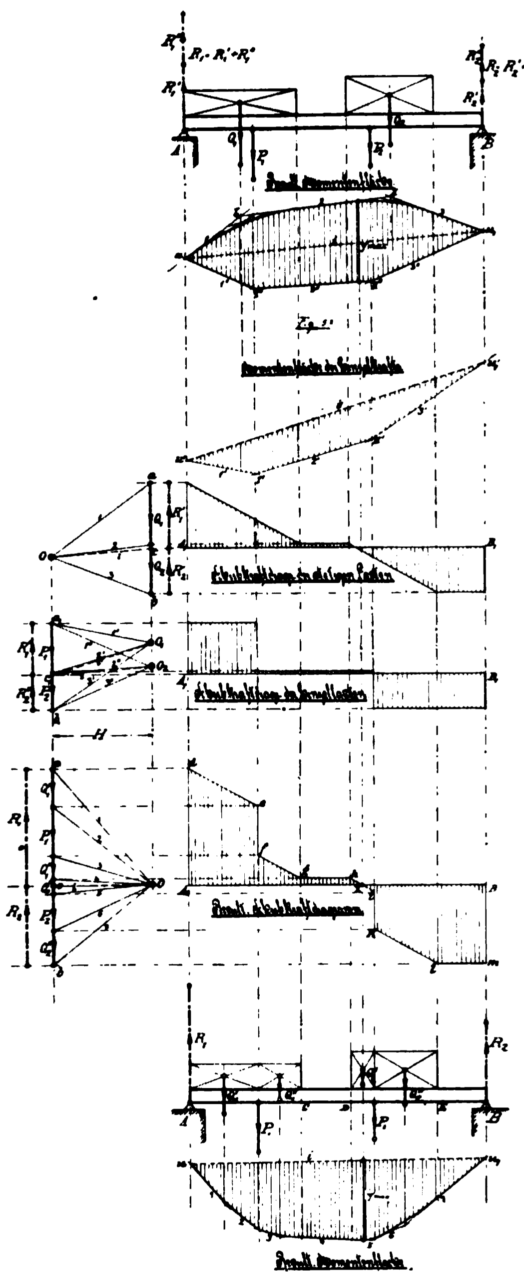


Fig. 57.

zu einem resultierenden Schubkraftdiagramm $A_1 \, d e f g h i k l m B_1$, welches im Schnittpunkt x mit der Nullinie $A_1 B_1$ den gefährlichen Trägerquerschnitt und somit auch das y_{max} bestimmt.

Bedeutend schneller gelangt man bei einiger Übung zum Ziel, indem man an den Stellen, wo die stetigen Lasten von den Einzelkräften unter-

brochen werden, eine Teilung dieser Lasten vornimmt und ein gemeinschaftliches Kräfte- und Seilpolygon entwirft. Würde man also Q_1 in Q_1' und Q_1'' und Q_2 in Q_2' und Q_2'' zerlegen und, nach Fig. 59 mit Q_1' beginnend, bei der gleichen Poldistanz H wie in Fig. 58, das Kräftepolygon aufzeichnen, so würde man auch ein Seilpolygon erhalten, welches direkt das zu jedem Trägerquerschnitt gehörende y ergibt. Eine Kontrolle für die Richtigkeit ist durch den Vergleich mit der in Fig. 58 konstruierten, resultierenden Momentenfläche ohneweiteres gegeben.


Fig. 58 und 59.

Die zuletzt angeführte Methode bietet noch die Möglichkeit, mit einem Schlage das resultierende Schubkraftdiagramm zu entwerfen, da alle Kräfte in ihrer Reihenfolge im Kräftepolygone gegeben sind. Man findet dann, dafs das erhaltene Diagramm dem durch algebraische Addition der Ordinaten nach Fig. 58 aufgezeichneten kongruent ist.

In Fig. 60 und 61 sind die Stützen nach innen verschoben und die vorstehend erläuterten Verfahren in genau gleicher Weise für einen ganz anderen Belastungsfall durchgeführt, um ihre allgemeine Anwendbarkeit nochmals im Bild vorzuführen. Auch hier liegt der Vorzug der Konstruktion nach Fig. 59 resp. Fig. 61 gegenüber der in Fig. 58 resp. Fig. 60 klar auf der Hand, da mit demselben eine ganz bedeutende Zeitersparnis verbunden ist. Das Schubkraftdiagramm zeigt, dafs A, B und x gefährliche Querschnitte sind, von denen der Querschnitt über der Stütze A in diesem Falle am ungünstigsten beansprucht wird, weil hier das y_{max} auftritt.

Bei einer indirekten Beanspruchung des Trägers durch eine über die ganze Länge gleichmäfsig verteilte Last werden die Querstützen die aufgenommenen Drücke in genau gleicher Weise auf den Träger *AB* übertragen, als wenn eine indirekte Belastung durch Einzelkräfte vorläge. Macht man dann, wie meist der Fall, die Querstützenentfernung einander gleich, so wäre im Beispiel Fig. 62 die Belastung des Trägers *AB* durch zwei in *C*

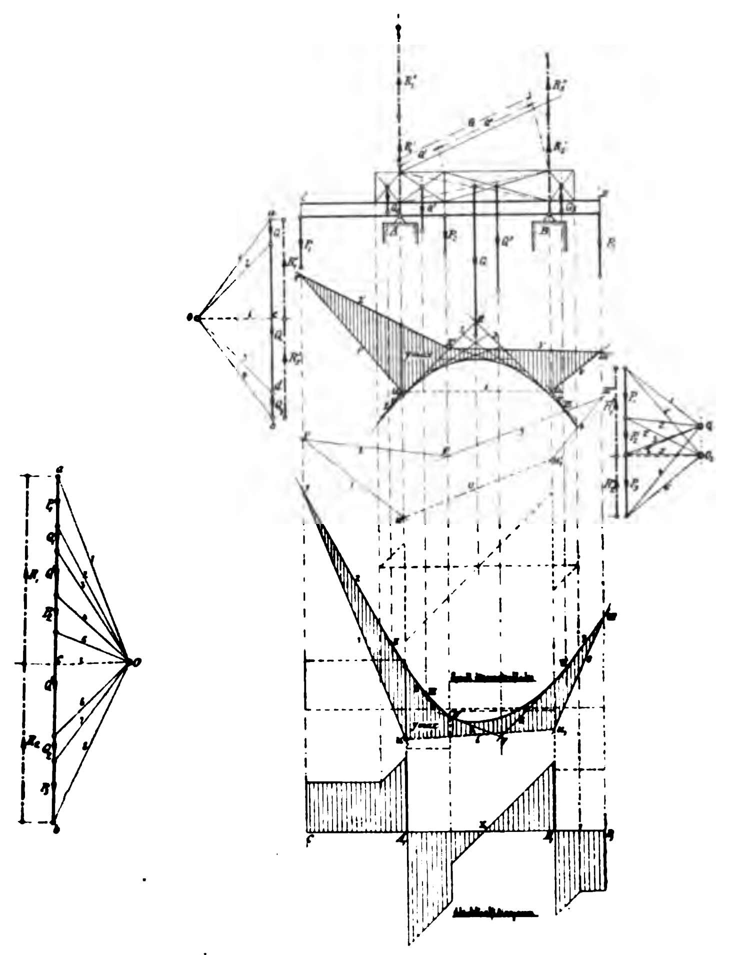


Fig. 60 und 61.

und *D* angreifende Einzelkräfte von je $\frac{Q}{3}$ gegeben. Entwirft man nun für diese das Kräfte- und Seilpolygon, so fällt im letzteren auf, dafs die Schlufslinie $u u_1$ parallel der Seite **2** ist, d. h. dafs alle y zwischen den Querschnitten *C* und *D* gleich grofs, nämlich gleich y_{max} sind. Hier wie auch in allen den Fällen, wo die Zahl der auf dem Träger untergebrachten Querstützen eine gerade ist, tritt deshalb die Erscheinung hervor, dafs sämtliche zwischen den innersten Stützen liegenden Querschnitte gleich

gefährlich sind, weil in ihnen gleiche Maximalmomente und Minimalschubkräfte ($V = 0$) auftreten. Der in Fig. 62 mit dem Polstrahl 2 zusammenfallende Strahl i, parallel $u u_1$, bestimmt natürlich nur die Reaktionen $R' = R'' = \frac{Q}{3}$, welche die Querstützdrücke $\frac{Q}{3}$ und $\frac{Q}{3}$ in den Lagern A und B erzeugten. In Wirklichkeit ist hierzu noch die Hälfte der zwischen den äufsersten Querstützen liegenden Last, die in diesem Falle $\frac{Q}{6}$ beträgt, zu addieren, so dafs:

$$R_1 = R_2 = R' + \frac{Q}{6} = R'' + \frac{Q}{6},$$

oder:

$$R_1 = R_2 = \frac{Q}{3} + \frac{Q}{6} = \frac{Q}{2}.$$

Fig. 62.

In Fig. 63 ist noch ein wichtiger Belastungsfall untersucht, bei welchem indirekt und direkt wirkende Kräfte den Träger auf Biegung beanspruchen. Momentenfläche und Schubkraftdiagramm lassen hier erkennen, dafs D und A gefährliche Querschnitte sind, und dafs die Profilbestimmung für den Stützquerschnitt A durchzuführen ist, da hier $y = y_{max}$.

§ 11. Der Träger auf zwei Stützen mit mobiler Belastung.

Bei einer direkten oder indirekten Belastung des Trägers durch mehrere bewegliche Einzellasten genügt die Aufzeichnung eines einzigen Seilpolygones nicht mehr, um den gefährlichen Querschnitt aufsuchen und dessen Maximalmoment feststellen zu können. Man müfste, streng genommen, die ganze Lastengruppe, bei welcher die Entfernung der einzelnen Lasten

voneinander konstant sein möge, in unendlich viele verschiedene Lagen bringen und demgemäfs auch unendlich viele Seilpolygone entwerfen, aus welchen das y_{max} aufzusuchen wäre.

Für praktische Untersuchungen wird man aber in der Weise vorgehen, dafs man sich die Einzellasten festgehalten denkt und den Träger mit den

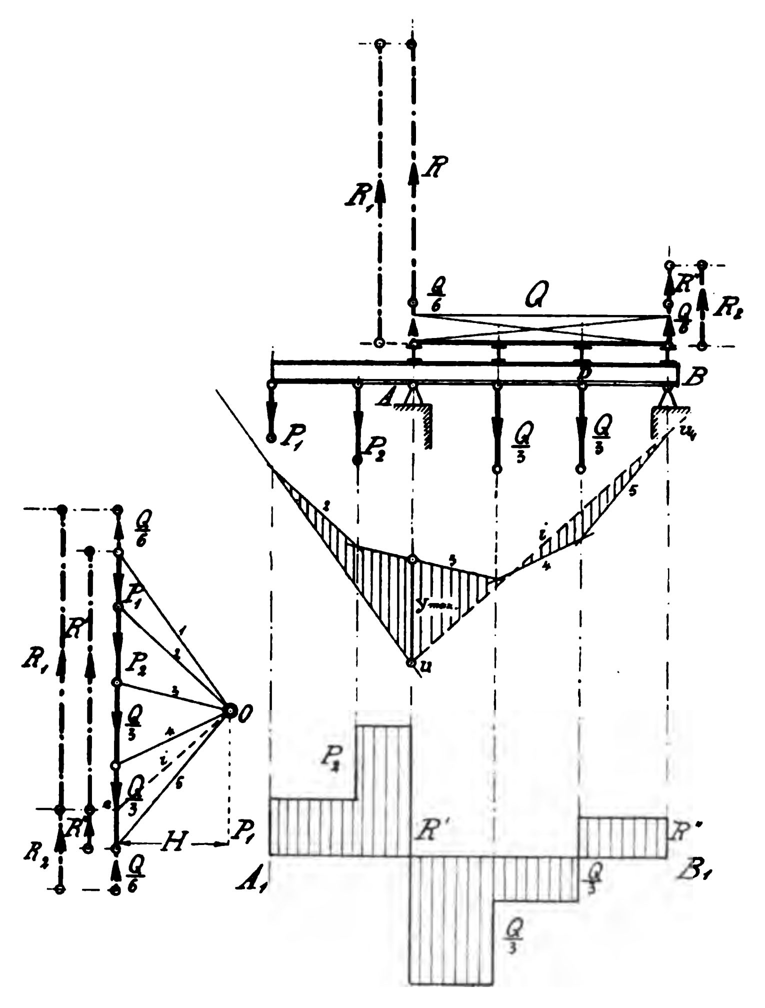


Fig. 63.

Stützen in eine für die Beurteilung der Trägerbeanspruchung genügend grofse Zahl verschiedener Lagen verschiebt. Hierbei braucht man das Seilpolygon nur einmal aufzuzeichnen, um dann für jede neue Stützenlage die entsprechende Schlufslinie zu ziehen.

Ist zunächst, wie in Fig. 64, nur eine einzige, direkt wirkende mobile Last vorhanden, so genügt schon eine kurze Überlegung, um zu erkennen, dafs die Trägerbeanspruchung am ungünstigsten wird, wenn die Last in

der Mitte steht. Für irgendeinen Querschnitt X in der Entfernung x von der Stütze A ist nämlich:

$$M_x = R \cdot x,$$

oder da:

$$R\,l - Q\,(l - x) = 0,$$

und hieraus:

$$R = \frac{Q}{l}\,(l - x)$$

$$M_x = \frac{Q}{l}\,(l - x)\,x.$$

Da x und deshalb auch M_x variabel, so wird dieser Ausdruck ein Maximum, wenn x ein Maximum. Man bestimme deshalb den ersten und zweiten Differentialquotienten, überzeuge sich, dafs letzterer negativ ist und setze den ersteren gleich Null, also:

$$\frac{d\,M_x}{d\,x} = (l - x) \cdot (1) + x\,(-1) = l - 2\,x$$

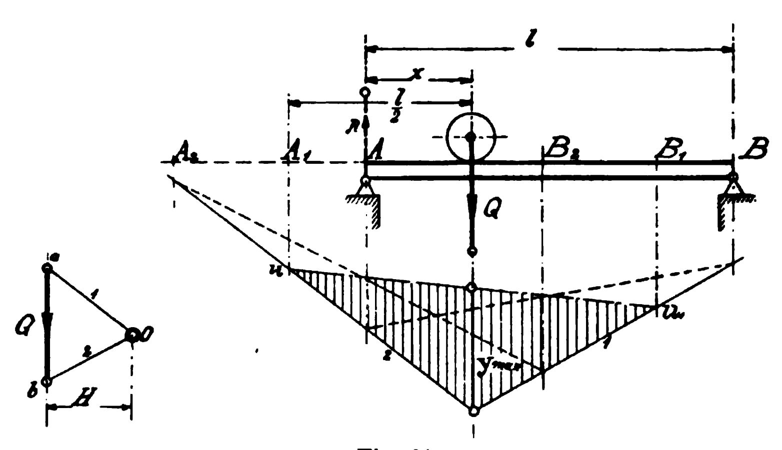


Fig. 64.

und:

$$\frac{d_2\,M_x}{d\,x^2} = -2,$$

folglich ergibt sich aus:

$$l - 2\,x = 0$$

$$x = \frac{l}{2},$$

d. h.: Bei der Mittelstellung der Last tritt das absolut gröfste Moment auf. Dementsprechend kann direkt für diese Stellung das Seilpolygon entworfen werden. Soll jedoch aus irgendwelchen Gründen keine prismatische Trägerform gewählt werden und ist deshalb das in einem bestimmten Querschnitt auftretende absolut gröfste Moment aufzusuchen, so empfiehlt sich das in Fig. 64 angedeutete, später noch genauer besprochene Verfahren.

Ebenso einfach gestaltet sich die Sache bei einer indirekt wirkenden mobilen Einzellast. Wohl kann man auch hier nach Fig. 65 durch Stützenverschiebung eine genauere Querschnittsuntersuchung vornehmen, jedoch

sieht man ohne weiteres, dafs die Querstützen C und D die Maximaldrücke auf den Träger AB übertragen, wenn die Last auf einer dieser Stützen ruht. Demnach benötigt man nur zwei Seilpolygone, aus welchen durch Vergleich beider miteinander das y_{max} zu entnehmen ist.

Bewegt sich eine ganze Lastengruppe, z. B. eine Lokomotive mit Tender, über einen Träger, siehe Fig. 66, so kann man bei Anwendung der bereits mehrfach erwähnten Stützenverschiebungsmethode von der mutmafslich ungünstigsten Belastung ausgehen Diese wird jedenfalls vorhanden sein, wenn die fünf Lasten Q_1 bis Q_5 zwischen den Stützen A und B stehen. Konstruiert man nun das zugehörige Seilpolygon $u\,I\,II\,III\,IV\,V\,u$ und verschiebt den Träger mit den Stützen A und B nach rechts in die Lagen A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 usw., so mufs, da jetzt auch Q_6 auf dem Träger steht, zunächst noch die Polygonseite 7 gezogen werden. Für die Lage A_1B_1 ist dann $u_1\,II\,III\,IV\,V\,VI\,u_1$ das zugehörige Seilpolygon, während in A_2B_2 resp. A_3B_3 ein Polygon $u_2\,II\,III\,IV\,V\,VI\,u_2$ resp. $u_3\,IV\,V\,VI\,u_3$ erhalten wird. Die Last Q_1 befindet sich also in den genannten drei Trägerlagen schon aufserhalb der Stütze A und schliefslich auch Q_2 und Q_3. Bei weiterer Verschiebung des Trägers nach rechts werden alle nachfolgenden Lasten

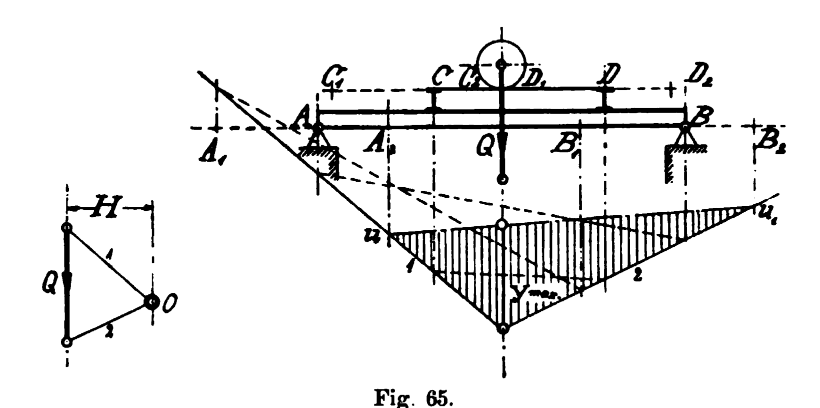
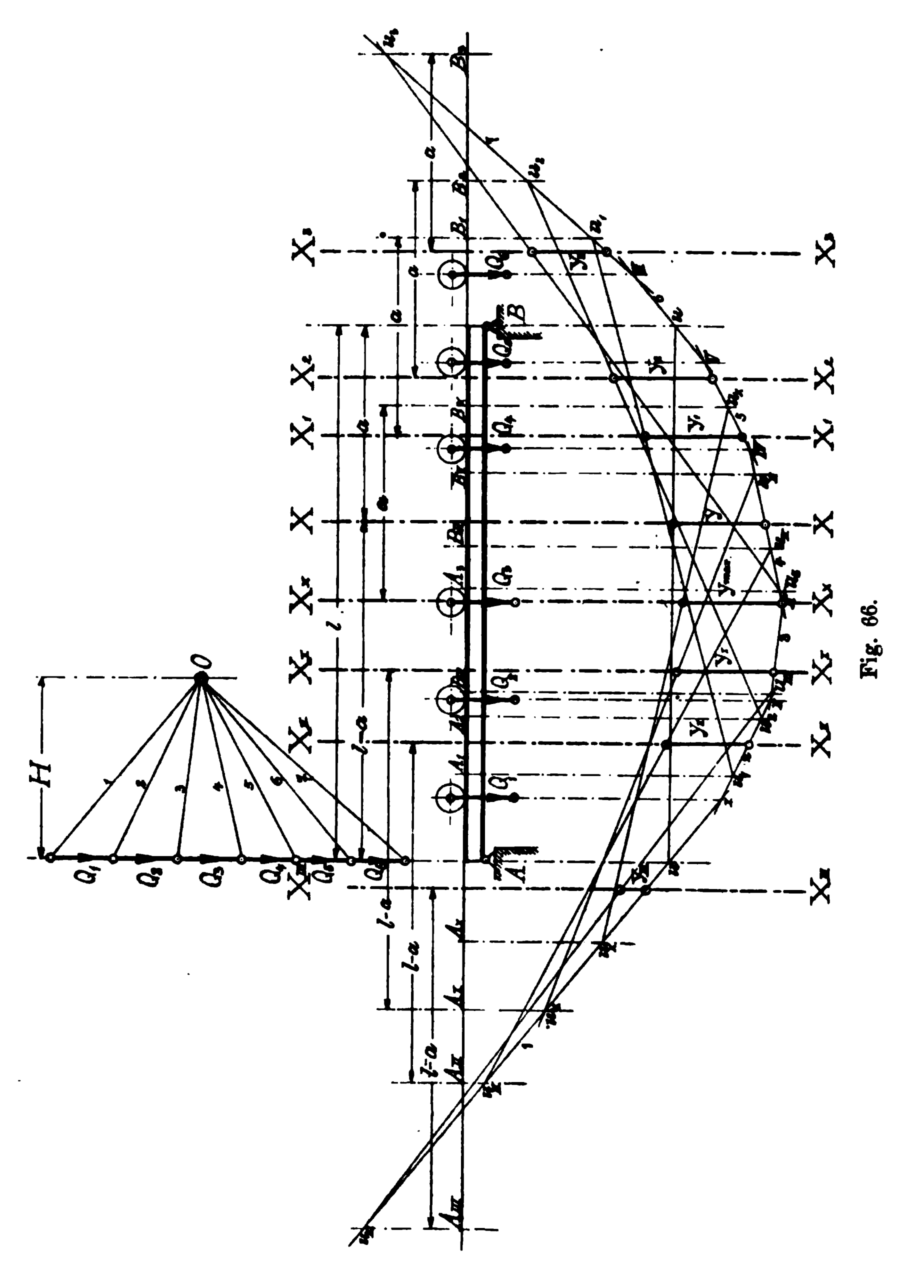


Fig. 65.

Q_4, Q_5 usw. über A hinausgehen, dementsprechend also die zugehörigen Seilpolygonseiten 4 und 5, 5 und 6 usw. ausgeschaltet werden, so dafs die Schlufslinie endlich, wenn keine Last mehr auf dem Träger steht, mit der letzten Polygonseite 7 zusammenfällt. Eine Verschiebung des Trägers nach links ergibt in genau gleicher Weise weitere Lagen der Schlufslinie, so dafs jetzt an die nähere Untersuchung der Querschnittsbeanspruchung herangetreten werden kann. Die Anleitung hierzu sei für einen beliebigen Querschnitt X in der Entfernung a von der Stütze B durchgeführt. Für denselben kann offenbar das y gröfser werden als das im Polygon $u\,I\,II\,III\,IV\,V\,u$ bereits bestimmte, wenn sich die Lastengruppe nach links oder nach rechts bewegt. Trägt man deshalb die Entfernung a von den neuen Stützenlagen B_1, B_2, B_3, B_4 usw. nach links auf resp. von A_I, A_{II}, A_{III}, A_{IV} usw. die entsprechende Entfernung $(l-a)$ nach rechts, so schneiden die durch die markierten neuen Querschnittslagen von X gezogenen Vertikalen in den zugehörigen Seilpolygonen verschiedene y ab, von denen das der Stützenlage A_xB_x entsprechende das y_{max} ist. Man erkennt dann aus der Fig. 66, dafs der Querschnitt X am ungünstigsten beansprucht wird, wenn die Last Q_3

gerade über demselben steht. Soll nun noch eine gleiche zeitraubende Untersuchung für andere Querschnitte vorgenommen werden, so wird die


Fig. 66.

Deutlichkeit der Zeichnung sehr beeinträchtigt und hiermit die Wahrscheinlichkeit geboten, leicht einen Fehler beim Abgreifen der einzelnen y zu machen. Deshalb empfiehlt sich für genauere Beurteilung der Träger-

beanspruchung am besten das Verfahren von Weyrauch, bei welchem direkt zu erkennen ist, welche Last über dem zu untersuchenden Querschnitt stehen mufs, um hier das Maximalmoment zu erzeugen. Dieses Verfahren besteht darin, dafs man nach Fig. 67 alle Lasten, welche bei der Bewegung von *B* nach *A* noch zwischen den Stützen stehen können, in *A* zu einem vertikalen Kräftezuge aneinanderreiht und die Verbindungslinien *BD*, *BE*, *BF* usw. der Endpunkte der einzelnen Lasten mit dem Stützpunkt *B* zieht. Die zu der Linie *BD* von dem betrachteten Querschnitt aus in die Kraftlinie hineingezogene Parallele schneidet dann diejenige Last, die, über dem Querschnitt stehend, hier das Maximalmoment erzeugt, wenn sich alle Lasten zwischen den Stützen befinden. Stehen nur 5, 4 oder 3 Lasten auf dem Träger, so sind von dem betrachteten Querschnitt aus zu den Geraden *BE*, *BF* oder *BG* die Parallelen zu ziehen, die wieder die gesuchten Lasten auf der Kraftlinie abschneiden. Über dem schon vorher untersuchten Querschnitt *X* in der Entfernung *a* von der Stütze *B* mufs demnach bei 6 Lasten zwischen den Stützen die Last Q_5 und bei 4 Lasten die Last Q_3 stehen, um in der zugehörigen Momentenfläche ein y_{max} zu ergeben. Dies ist auch in Fig. 66 bestätigt worden, wo das absolute y_{max} bei 4 Lasten auftrat.

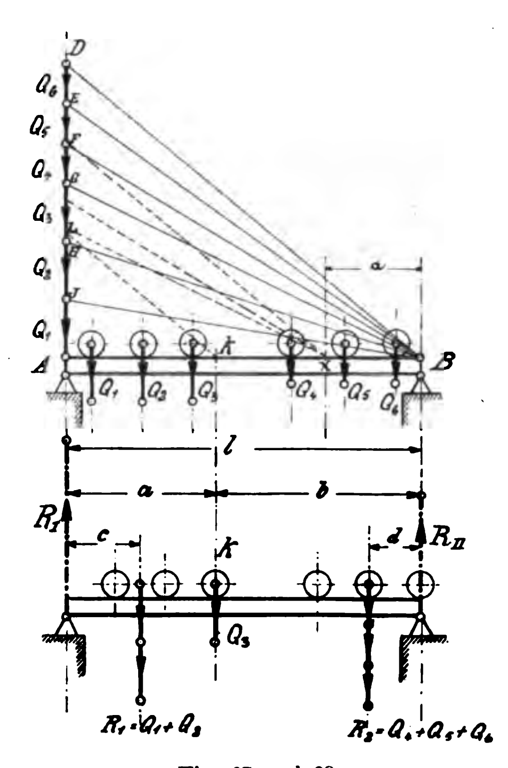


Fig. 67 und 68.

Ein strengerer Beweis für die Richtigkeit der in Fig. 67 gegebenen Konstruktion erfolgt mit Benutzung der Fig. 68:

Für den beliebigen Querschnitt *K* ist z. B. bei 6 Lasten zwischen den Stützen durch Ziehen der Geraden $KL \parallel BD$ bestimmt, dafs Q_3 über *K* stehen mufs, um hier ein y_{max} zu erzeugen. Zeichnet man deshalb die Lasten nach Fig. 68 genau so auf und ist R_1 die Resultierende aller links von *K* vorhandenen Lasten, während R_2 die Mittelkraft aller rechts wirkenden sein möge, so ergibt sich das in *K* auftretende Moment zu:

$$M_K = R_I \cdot a - R_1 (a - c),$$

oder da:

$$R_I \cdot l - R_1 (l - c) - Q_3 b - R_2 d = 0 \cdot$$

$$R_I = R_1 \frac{l - c}{l} + Q_3 \frac{b}{l} + R_2 \frac{d}{l}.$$

Durch Einsetzung in die Gleichung für M_K folgt dann:

$$M_K = R_1 \frac{l-c}{l} \cdot a + Q_3 \frac{b}{l} \cdot a + R_2 \frac{d}{l} \cdot a - R_1 a + R_1 c$$

$$M_K = R_1 a - R_1 \frac{c}{l} \cdot a + Q_3 \frac{b}{l} \cdot a + R_2 \frac{d}{l} \cdot a - R_1 a + R_1 c$$

$$M_K = R_1 c \left(\frac{l}{l} - \frac{a}{l}\right) + R_2 \frac{a d}{l} + Q_3 \frac{a b}{l},$$

oder da:

$$l - a = b,$$

$$M_K = R_1 \frac{b}{l} \cdot c + R_2 \frac{a}{l} \cdot d + Q_3 \frac{a}{l} \cdot b.$$

Nimmt man nun an, dafs bei einer ganz geringen Verschiebung x der Lastengruppe nach rechts das Moment M_K um $\varDelta M$ gröfser würde, so folgt:

$$M_K + \varDelta M = R_1 \frac{b}{l}(c + x) + R_2 \frac{a}{l}(d - x) + Q_3 \frac{a}{l}(b - x),$$

oder:

$$M_K + \varDelta M = R_1 \frac{b c}{l} + R_1 \frac{b x}{l} + R_2 \frac{a d}{l} - R_2 \frac{a x}{l} + Q_3 \frac{a b}{l} - Q_3 \frac{a x}{l}.$$

Da hierin:

$$R_1 \frac{b c}{l} + R_2 \frac{a d}{l} + Q_3 \frac{a b}{l} = M_K,$$

so folgt weiter:

$$M_K + \varDelta M = M_K + \frac{x}{l}(R_1 \cdot b - R_2 \cdot a - Q_3 \cdot a)$$

oder:

$$M_K + \varDelta M = M_K + \frac{x}{l}[R_1 b - a (R_2 + Q_3)].$$

Soll nun M_K für die angenommene Lastenstellung ein Maximum bleiben, so mufs:

$$\varDelta M = \frac{x}{l}[R_1 b - a (R_2 + Q_3)]$$

negativ werden, d. h. es mufs:

$$R_1 b < a (R_2 + Q_3),$$

und deshalb:

$$\frac{R_1}{R_2 + Q_3} < \frac{a}{b}$$

sein. Dies trifft tatsächlich zu, wenn nach Fig. 67:

$$R_1 = Q_1 + Q_2 \text{ und } R_2 = Q_4 + Q_5 + Q_6$$

eingesetzt wird. Ein ähnlicher Beweis würde sich ergeben, wenn man sich die Lastengruppe um eine ganz kleine Strecke z nach links verschoben denkt. In diesem Falle folgt:

$$\frac{R_1 + Q_3}{R_2} > \frac{a}{b}.$$

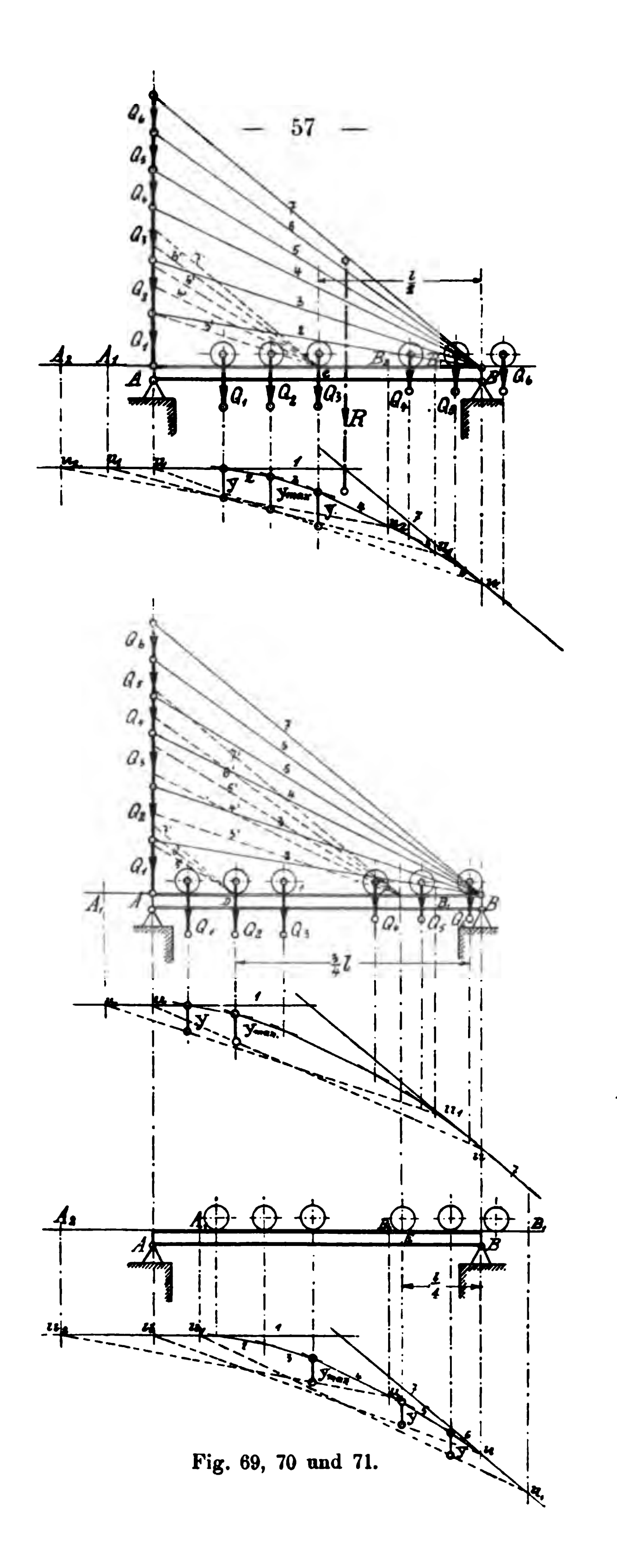


Fig. 69, 70 und 71.

Unter Zuhilfenahme der Weyrauchschen Methode sollen nun noch die in den Querschnitten C, D und E auftretenden Maximalmomente ermittelt werden. Hierbei kann man nach Fig. 69 und Fig. 70 den in A aufgetragenen vertikalen Lastenzug Q_1, Q_2, Q_3 usw. mit der Summe aller nach B gezogenen Strahlen natürlich auch als ein Kräftepolygon auffassen, in welchem jetzt B der Pol und die Trägerlänge l die Poldistanz ist. Für den in der Mitte liegenden Querschnitt C zeigen die Strahlen $7' \parallel 7$ und $6' \parallel 6$, dafs bei 6 und 5 Lasten zwischen den Stützen die Last Q_3 gerade in der Trägermitte stehen mufs, um hier ein Maximalmoment zu erzeugen.

Zeichnet man deshalb nach Fig. 69 die Lasten dementsprechend auf, so sieht man, dafs Q_6 schon aufserhalb der Stütze B liegt und für die Untersuchung nur die 5 Lasten Q_1. bis Q_5 in Frage kommen. Für diese entwirft man das Seilpolygon, zieht die Schlufslinie uu und markiert durch Herunterloten von C das y.

Stehen 4 Lasten zwischen den Stützen, so zeigt $5' \parallel 5$, dafs jetzt Q_2 über C liegen mufs, um hier abermals ein Maximalmoment hervorzurufen. Man verschiebe deshalb den Träger nach links in die Lage $A_1 B_1$, also so weit, bis Q_2 die gewünschte Stellung einnimmt, lotet A_1 und B_1 in das Seilpolygon, wodurch die neue Schlufslinie $u_1 u_1$ erhalten wird, und stellt das von der Kraftlinie von Q_2 im neuen Polygon abgeschnittene y fest. Hiermit wäre schon für den Querschnitt C die Untersuchung beendet, denn bei weniger als 4 Lasten zwischen den Stützen kann bei dem gewählten Beispiel niemals die von $4' \parallel 4$, $3' \parallel 3$ und $2' \parallel 2$ bezeichnete Last in der Trägermitte stehen. Man findet demnach durch Vergleich beider y miteinander, dafs der Querschnitt C am ungünstigsten beansprucht wird, wenn Q_2 gerade über der Trägermitte steht, denn hier ist das y ein Maximum.

Ganz analog ist in Fig. 70 und Fig. 71 die y_{max}-Bestimmung für die Querschnitte D und E durchgeführt, welche nötigenfalls auch noch auf mehrere andere Querschnitte ausgedehnt werden könnte.

Zu untersuchen bleibt noch, ob das für die Trägermitte ermittelte y_{max} wirklich das absolut gröfste ist, denn das gröfste Moment ist offenbar unter derjenigen Last zu erwarten, welche der Resultierenden aller Lasten am nächsten liegt. Es mufs demnach erst noch nachgewiesen werden, wo die Last Q_2 zu liegen hat, um in dem darunterliegenden Querschnitt F das Maximalmoment zu erzeugen. Dies geschehe mit Hilfe der Fig. 72. Für den Querschnitt F ist:

$$M_F = R_1 x - Q_1 \cdot m,$$

oder da:

$$R_1 l - R(l - x - n) = 0$$

und

$$R_1 = R \frac{l - x - n}{l}$$

$$M_F = \frac{R}{l}(l - x - n)\, x - Q_1 m.$$

Hierin wird M_F ein Maximum, wenn x ein Maximum. Also:

$$\frac{d M_F}{dx} = (l - x - n)(1) + x(-1) = l - n - 2x.$$

Aus:

$$l - n - 2x = 0$$

folgt dann:

$$x = \frac{l - n}{2},$$

d. h. das Moment des Querschnitts F unter Q_2 wird ein Maximum, wenn die Resultierende aller auf dem Träger stehenden Lasten genau so weit von der Trägermitte entfernt ist als Q_2 selbst.

Aus den Fig. 69 bis 71 war das gröfste y ermittelt, wenn Q_2 gerade über der Trägermitte steht. Wären jetzt nur die 3 gleich weit voneinander entfernt liegenden Lasten Q_1, Q_2 und Q_3 auf dem Träger, so könnte man dieses y_{max} für die Profilbestimmung beibehalten, da die Resultierende von Q_1, Q_2 und Q_3 in die Richtung von Q_2 fällt. Hier üben aber 4 Lasten eine biegende Wirkung aus. Man wird deshalb nach Fig. 73 für diese 4 Kräfte die Resultierende R bestimmen und den Träger so unter die Lasten zeichnen, dafs R und Q_2 gleich weit von der Trägermitte abliegen. Nach diesem entwirft man das Kräfte- und Seilpolygon und erkennt in der Tat, dafs die Richtungslinie von Q_2 ein noch etwas gröfseres y abschneidet, als für die Trägermitte gefunden war. Der in der Entfernung $\frac{l-n}{2}$ von A liegende Querschnitt ist also hier der absolut gefährlichste, für welchen bei prismatischer Trägerform die Profilbestimmung nach der Gleichung:

$$y_{max} \times \text{Kräftemafsstab} \cdot l \times \text{Längenmafsstab} = W \cdot k$$

durchzuführen ist.

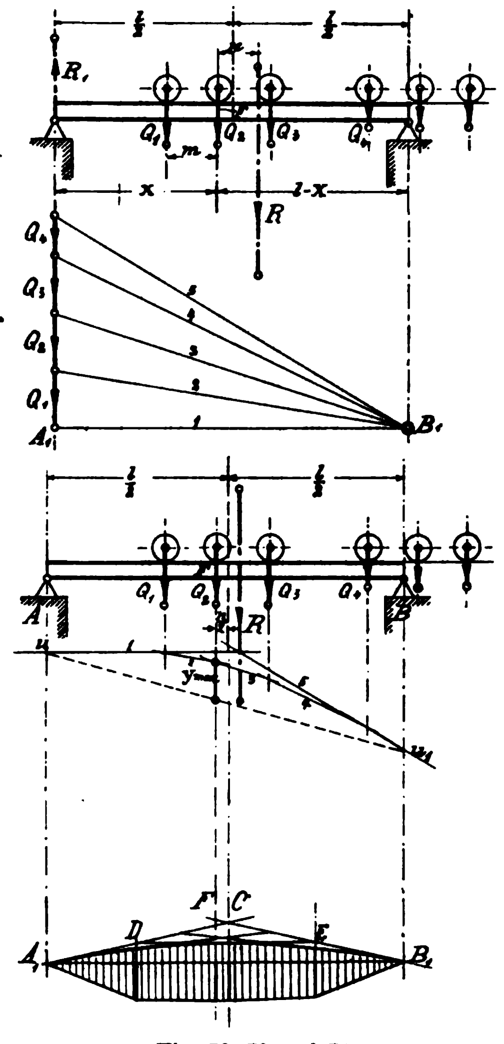


Fig. 72, 73 und 74.

Ein hinreichend genaues Bild der ganzen Trägerbeanspruchung ergibt sich nun, wenn man die in den betrachteten Querschnitten C, D, E und F ermittelten gröfsten y nach Fig. 74 von einer Wagerechten $A_1 B_1$ aus als Ordinaten nach unten aufträgt und deren Endpunkte durch Gerade miteinander verbindet. Ist dann das Profil mittels vorstehender Formel berechnet und das Trägereigengewicht festgestellt, so läfst sich noch über der Geraden $A_1 B_1$ die mit der Poldistanz l in bekannter Weise entworfene Momentenparabel für die gleichmäfsig verteilt angenommene Eigenlast einzeichnen und dann aus der resultierenden Momentenfläche eine genauere Nachrechnung der Materialspannung vornehmen.

Bei einer indirekten Belastung des Trägers durch eine Anzahl mobiler Lasten, siehe Fig. 75, ist zunächst wieder mittels des Weyrauchschen Verfahrens festzustellen, welche Last über irgendeiner Querstütze zu stehen hat, damit in dem darunter liegenden Trägerquerschnitt das Maximalmoment auftritt. Ist dann die Bestimmung dieser Momente für die Querschnitte C, D und E genau so durchgeführt, wie dies in den Fig. 69 bis 71 geschehen, so läfst sich das oben Gesagte benutzen, um die Momentenfläche mit dem y_{max} aufzeichnen und die Kontrollrechnung der Materialspannung durchführen zu können.

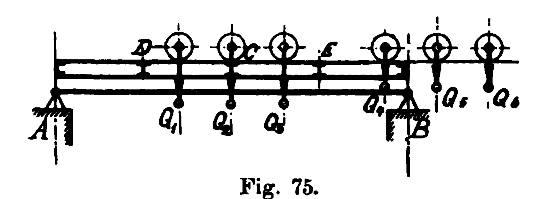


Fig. 75.

§ 12. Praktische Aufgaben über den Träger auf zwei Stützen.

Aufgabe 1.

Es soll das Normalprofil eines 7,5 m langen I-Trägers, der durch 3 Einzelkräfte beansprucht wird, bestimmt werden, wenn im gefährlichen Querschnitt ohne Rücksicht auf das Trägereigengewicht nur eine zulässige Spannung von $k = 10$ kg pro mm² auftreten darf. Ferner ist nach Wahl des Profiles die tatsächlich vorhandene gröfste Spannung zu ermitteln.

Lösung. Nach Fig. 76 ergibt das Schubkraftdiagramm in C den gefährlichen Querschnitt. Für diesen gilt:

$$M_C = M_{max} = y_{max} \cdot H = W \cdot k,$$

also:

$$W = \frac{y_{max} \cdot H}{k},$$

oder mit Rücksicht auf den gewählten Kräfte- und Längenmafsstab:

$$W = \frac{20{,}6 \times 150 \cdot 13{,}33 \times 150}{10} = 620000 \text{ mm}^3.$$

Dem entspricht für $W = 659\,000$ mm³ ein Profil Nr. 30.

1 m dieses Trägers wiegt 54,1 kg, so dafs das Gesamtgewicht:

$$G = 7{,}5 \cdot 54{,}1 = \backsim 406 \text{ kg}.$$

Fafst man nun G als gleichmäfsig über die ganze Trägerlänge verteilte Last auf, welche gleiche Reaktionen $\frac{G}{2}$ und $\frac{G}{2}$ erzeugt, und konstruiert die Momentenparabel, wobei man noch durch Polverschiebung die Schlufslinie mit der der anderen Momentenfläche zusammenfallen lassen kann, so folgt für den Querschnitt C aus der resultierenden Fläche:

$$y_{max_1} \cdot H = W \cdot k \cdot$$

$$k = \frac{y_{max_1} \cdot H}{W},$$

oder:

$$k = \frac{22 \times 150 \cdot 13{,}33 \times 150}{659\,000} = 10{,}015 \text{ kg pro mm}^2.$$

Aufgabe 2.

Ein für maximale Tragfähigkeit behauener prismatischer Eichenholzbalken von rechteckigem Querschnitt sei wie in Fig. 77 belastet. Welche Querschnittsabmessungen sind zu wählen, wenn für die Druckfasern eine gröfste Spannung von $k = 0{,}6$ kg pro mm² zulässig sein soll?

Lösung. Zerlegt man Q in Q_1 und Q_2 und entwirft für die 4 Kräfte Q_1, P_1, Q_2 und P_2 das Kräfte- und Seilpolygon, so fällt hier die durch Pol O gezogene Gerade i $\parallel uu_1$ aufserhalb der Kraftlinie ab und bestimmt

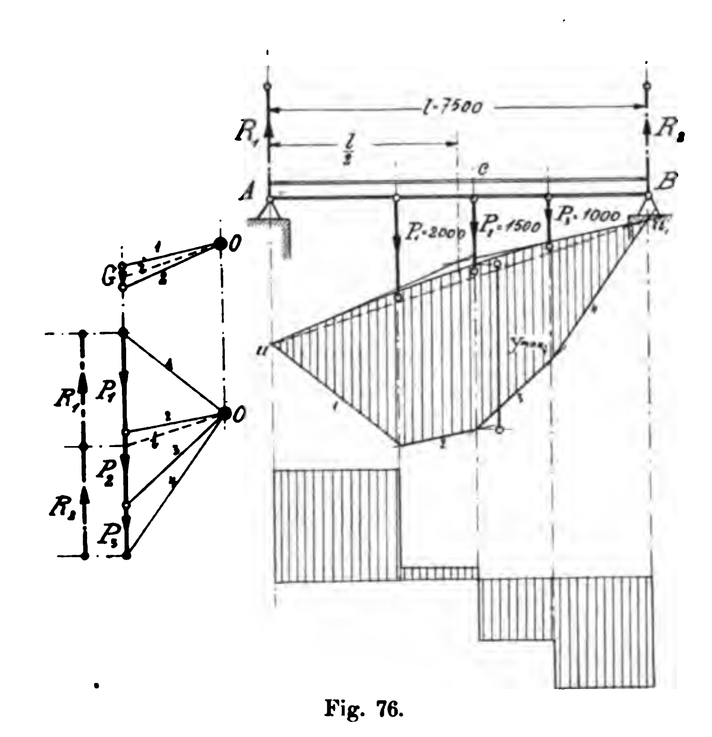


Fig. 76.

durch den Punkt c die Gröfse von $R_1 = ac$ und $R_2 = bc$, wobei R_1 der Reaktion R_2 entgegengesetzt gerichtet sein mufs, denn:

$$R_2 - R_1 = Q_1 + Q_2 + P_1 + P_2.$$

Das Schubkraftdiagramm bezeichnet dann B als gefährlichen Querschnitt, so dafs für diesen:

$$M_B = M_{max} = y_{max} H = W \cdot k,$$

$$W = \frac{y_{max} \cdot H}{k},$$

also:

$$W = \frac{33{,}3 \times 75 \cdot 13{,}33 \times 150}{0{,}6} = 8333333 \text{ mm}^3.$$

Bei rechteckigem Querschnitt ist die Tragfähigkeit des Balkens ein Maximum, wenn die Breite $b = \frac{5}{7} h$ ist, folglich:

$$8\,333\,333 = \frac{b h^2}{6} = \frac{5 h^3}{42}$$

und:

$$h = \sqrt[3]{\frac{42 \cdot 8\,333\,333}{5}} = \sim 410 \text{ mm},$$

Dann ist $b = \frac{5}{7} \cdot 410 = 293$ mm.

Aufgabe 3.

Für den in Fig. 78 dargestellten Giefsereikran von $a + b = 8850$ mm Ausladung, dessen Maximallast einschliefslich des Eigengewichts der Laufkatze $Q_1 = 2400$ kg betragen soll, ist das aus [-Eisen zu konstruierende Gerüst zu berechnen. Ferner sind die Abmessungen des Hals- und Stützzapfens festzustellen.

Lösung. Schätzt man das Eigengewicht des Gerüstes mit der Armatur auf $G = \sim Q_1$ kg und die horizontale Schwerpunktsentfernung von der Säulenachse auf ca. $\frac{a + b}{4}$, so kann der Einflufs des Gesamtgewichts bei der Berechnung mit erhöhter Sicherheit in der Weise berücksichtigt werden, dafs man zu der gegebenen Maximallast Q_1 noch $\frac{G}{4}$ hinzufügt. Dann ist:

$$Q = Q_1 + \frac{G}{4} = \frac{5}{4} Q_1 = 3000 \text{ kg}.$$

Bei dem Horizontalausleger AB ist die Laufkatze als mobile Belastung aufzufassen, die sich auf die beiden Achsen zu je $\frac{Q}{2}$ verteilt. Die Katzenstellung ist offenbar entweder bei der Maximalausladung am ungünstigsten, oder dann, wenn eine der Achsen genau so weit aus der Mitte von AB entfernt liegt als die Resultierende R von $\frac{Q}{2}$ und $\frac{Q}{2}$. Letzteres ist der Fall, sobald die Katze um ein Viertel des Radstandes aus der Mitte von AB steht. Zeichnet man die beiden Belastungsfälle nach Fig. 79 heraus, entwirft ein gemeinschaftliches Kräftepolygon und die entsprechenden Seilpolygone, so ergibt sich das y_{max} unter dem Stützquerschnitt B für die äufserste Rechtsstellung der Katze. Da nun der Ausleger, wie auch die Vertikalsäule und die Streben aus je zwei [-Eisen besteht, so folgt für den gefährlichen Querschnitt B:

$$M_B = M_{max} = y_{max} \cdot H = 2\,W \cdot k,$$

oder, wenn für fünffache Sicherheit $k = 8$ kg pro qmm gewählt wird und die Zeichnung für einen Längenmafsstab 1 : 200 und Kräftemafsstab 200 kg = 1 mm entworfen ist:

$$W = \frac{y_{max} \cdot H}{2 \cdot k} = \frac{27{,}25 \times 200 \cdot 5 \times 200}{2 \cdot 8} = 340\,625 \text{ mm}^3.$$

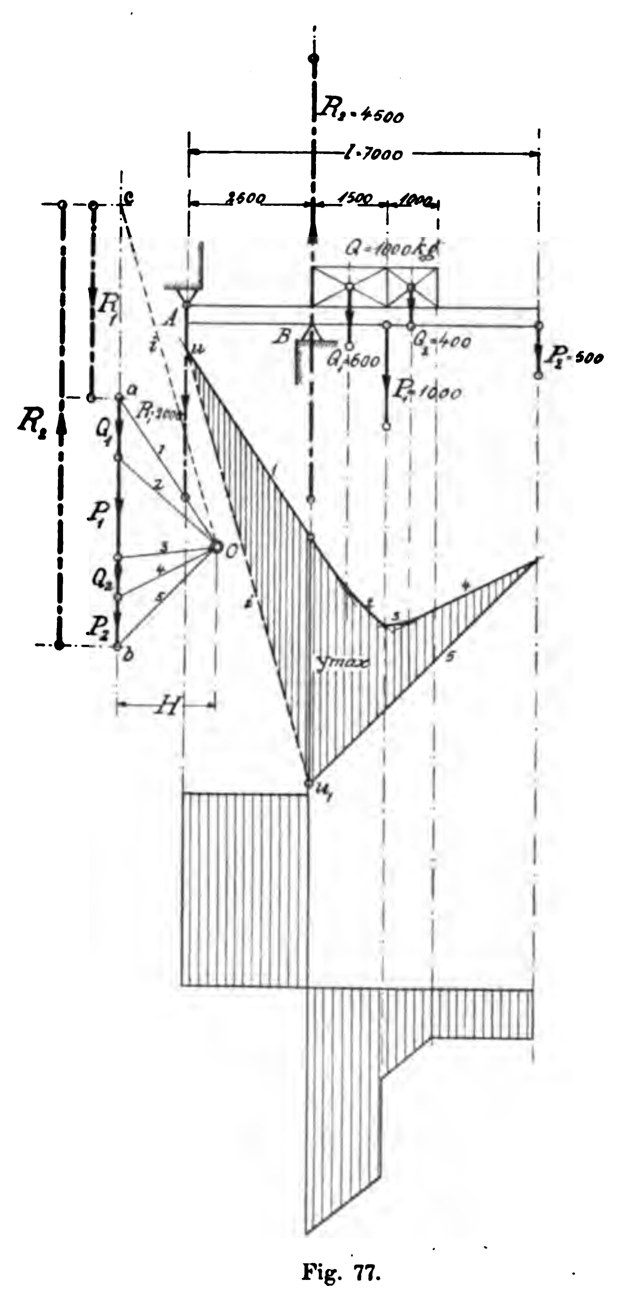

R₂ = 4500
l = 7000
2600
1500
1000
Q = 1000 kg
A
B
Q₁ = 600
Q₂ = 400
P₁ = 1000
P₂ = 500
R₁
R₂
R₁ = 2000
Q₁
P₁
Q₂
P₂
a
b
c
O
H
u
u₁
ymax

Fig. 77.

Nach den Profileisennormalien ist für die Ausführung ein N. Pr. 26 zu nehmen mit $W = 374\,000$ mm³.

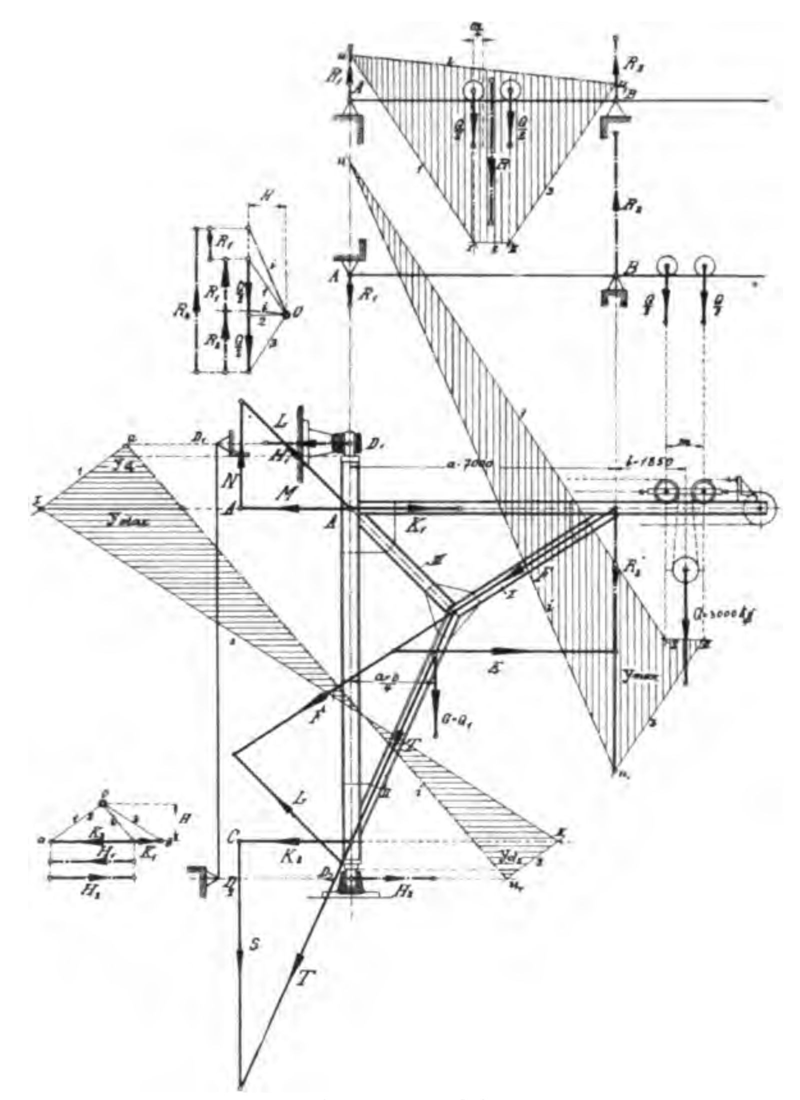


Fig. 78, 79 und 80.

Hierdurch reduziert sich die in B herrschende Spannung der äufsersten Fasern auf:

$$k = \frac{y_{max} H}{2 \cdot W} = \frac{27{,}25 \times 200 \cdot 5 \times 200}{2 \cdot 374\,000} = \backsim 7{,}28 \text{ kg pro mm}^2.$$

Bei der äufsersten Katzenstellung ist der im Stützpunkt B erzeugte Druck $R_2' = R_2$ ein Maximum. Entnimmt man diesen dem Kräftepolygon,

Fig. 79, und leitet ihn in die Richtung der Strebe I ab, so ergeben sich mittels des Kräftedreiecks die Komponenten F und E, von denen F jetzt als Resultierende die Strebenspannungen T und L hervorruft. Nach weiterer Zerlegung von T und L erhält man die in A und C wirksamen Horizontalkräfte M und K_2 sowie die Vertikalkräfte S und N. Durch graphische Addition findet man schliefslich, dafs die in A angreifende Resultierende von E und M, nämlich $K = E - M$, gleich der in C auftretenden Horizontalkraft K_2, aber entgegengerichtet ist, während als abwärts gerichtete Vertikalkraft $V = S - N = Q$ erhalten wird.

Der Einflufs der Zugspannung K_1 auf den Ausleger kann im allgemeinen für die Rechnung vernachlässigt werden, zumal ohnehin das Profil reichlich grofs gewählt wird. Da hier ein Profilquerschnitt von $F = 4840$ mm² vorhanden, so würden z. B. die Fasern auf der Zugseite des gefährlichen Querschnitts nur um:

$$k = \frac{K_1}{2\,F} = \frac{14{,}25 \times 200}{2 \cdot 4840} = 0{,}305 \text{ kg pro mm}^2$$

mehr gespannt werden, so dafs die absolut gröfste Spannung der äufsersten Zugfasern:

$$k_r = 7{,}28 + 0{,}305 = 7{,}585 \text{ kg pro mm}^2$$

beträgt.

Die Säule kann man sich, wie in Fig. 80 herausgezeichnet, in D_1 und D_2 horizontal gestützt und durch die gleichgrofsen, verschieden gerichteten Horizontalkräfte K_1 und K_2 auf Biegung beansprucht denken. Beim Kräftepolygon sind dann 1 und 3 die äufsersten Polstrahlen, deren entsprechenden Seilzugseiten 1 und 3 die Schlufslinie $u\,u_1$ und somit auch durch die Gerade $i \parallel u\,u_1$ die in D_1 und D_2 vorhandenen gleich grofsen, entgegengesetzt gerichteten Horizontalreaktionen H_1 und H_2 bestimmen. Da nun im Seilpolygon das y für den Säulenquerschnitt A ein Maximum ist, so folgt:

$$M_A = M_{max} = y_{max} \cdot H = 2\,W \cdot k$$

oder:

$$W = \frac{y_{max} \cdot H}{2 \cdot k} = \frac{18{,}5 \times 200 \cdot 5 \times 200}{2 \cdot 8} = 231\,250 \text{ mm}^3.$$

Dem entspricht für $W = 247\,000$ mm³ ein [-Eisen Pr. Nr. 22.

Auch hier kann der Einflufs der Vertikalkraft $V = Q$ auf die Säule vernachlässigt werden, da die zusätzlichen Druckspannungen nur geringfügig sind. Dagegen spielt V eine mehr oder minder wichtige Rolle bei der Berechnung des stählernen Spurzapfens.

Der letztere mufs eine derartig Druckfläche haben, dafs der spezifische Flächendruck auf die Stahlspur ein Herauspressen des Öles nicht befürchten läfst. Wählt man demnach für Stahl auf Stahl einen Einheitsdruck $p = 2$ kg pro mm², so folgt aus:

$$V = Q = d_2^2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot p$$

$$d_2^2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{3000}{2} = 1500 \text{ mm}^2,$$

d. h. ein Zapfendurchmesser von $d_2 = 44$ mm.

Mit Rücksicht auf Biegung ergibt sich für die Zapfenwurzel:

$$y_{d_2} \cdot H = W \cdot k$$

oder:

$$W = 0{,}1\,d_2^3 = \frac{y_{d_2} \cdot H}{k}.$$

Für $k = 7$ kg pro mm² ist dann:

$$d_2 = \sqrt[3]{\frac{y_{d_2} \cdot H}{0{,}1 \cdot k}} = \sqrt[3]{\frac{2{,}75 \times 200 \cdot 5 \times 200}{0{,}1 \cdot 7}} = \backsim 92 \text{ mm}.$$

Für die Ausführung wäre also dieser Durchmesser beizubehalten.

Der Durchmesser des Halslagerzapfens folgt aus:

$$y_{d_1} \cdot H = W \cdot k = 0{,}1 \cdot d_1^3 \cdot k$$

zu

$$d_1 = \sqrt[3]{\frac{3{,}25 \times 200 \cdot 5 \times 200}{0{,}1 \cdot 7}} = \backsim 98 \text{ mm}.$$

Bei der Berechnung der drei auf Druck beanspruchten Streben I, II und III legt man am sichersten den zweiten Knickfall zugrunde und erhält dann:

Strebe I:

$$\frac{F}{2} = \pi^2 \cdot \frac{E \cdot J}{m \cdot l^2}.$$

Hieraus ergibt sich das kleinste Trägheitsmoment eines [-Eisens zu:

$$J = \frac{F \cdot m \cdot l^2}{2 \cdot \pi^2 \cdot E}.$$

Wählt man den Sicherheitskoeffizienten $m = 5$, und ist die Stablänge $l = 25 \times 200 = 5000$ mm, ferner der Elastizitätsmodul $E = 20\,000$ kg pro mm², so folgt für $\pi^2 = 10$ und $F = 34{,}75 \times 200 = 6950$ kg

$$J = \frac{34{,}75 \times 200 \cdot 5 \cdot (25 \times 200)^2}{2 \cdot 10 \cdot 20\,000} = 2\,171\,875 \text{ mm}^4.$$

Dem entspricht für $J = 2\,260\,000$ mm⁴ ein Pr. Nr. 22.

Strebe II:

$$\frac{T}{2} = \pi^2 \cdot \frac{E \cdot J}{m \cdot l^2}.$$

$$J = \frac{36 \times 200 \cdot 5 \cdot (30 \times 200)^2}{2 \cdot 10 \cdot 20\,000} = \backsim 3\,240\,000 \text{ mm}^4.$$

Nach Tabelle folgt für $J = 3\,640\,000$ mm⁴ ein Pr. Nr. 26.

Strebe III:

$$\frac{L}{2} = \pi^2 \cdot \frac{E \cdot J}{m \cdot l^2}.$$

$$J = \frac{20{,}25 \times 200 \cdot 5 \cdot (17{,}5 \times 200)^2}{2 \cdot 10 \cdot 20\,000} = 620\,156 \text{ mm}^4.$$

Für $J = 712\,000$ mm⁴ ergibt sich ein Pr. Nr. 14.

Aufgabe 4.

Zur Überführung einer Eisenbahn über einen Weg ist ein einfacher Träger von 6 m Stützweite zu berechnen.

Lösung. Der Berechnung sei eine $^2/_4$-gekuppelte Schnellzuglokomotive von 52 000 kg Dienstgewicht zugrunde gelegt, bei welcher der Achsendruck des Drehgestells $Q_1 + Q_2 = 22\,000$ kg, der der Triebachse $Q_3 = 15\,000$ kg und der der Kuppelachse $Q_4 = 15\,000$ kg sein möge.

Wird nun für die so einfach wie möglich auszuführende Konstruktion eine direkte Belastung angenommen, so findet man am schnellsten den Querschnitt, wo das absolut gröfste Moment vorhanden ist, indem man den

im vorigen Paragraphen zuletzt bewiesenen Satz zu Hilfe nimmt. Nach diesem tritt das Maximalmoment unter derjenigen Last auf, welche der Resultierenden aller auf dem Träger noch Platz findenden Lasten am nächsten liegt.

Alle vier Achsen können nach Fig. 81 überhaupt nicht zwischen den Stützen A und B stehen, so dafs hier nur drei oder weniger Lasten in Frage kommen. Dann ist die Wahrscheinlichkeit am gröfsten, dafs bei irgendeiner Stellung der Lasten Q_2, Q_3 und Q_4 zwischen A und B unter Q_3 das Maximalmoment auftritt. Die Lage dieser Lastengruppe wird nach Fig. 81 erhalten, indem man das Kräfte- und Seilpolygon konstruiert, durch den Schnittpunkt S der äufsersten Seilzugseiten 2 und 5 die Lage der Resultierenden R bestimmt, deren Entfernung von Q_3 halbiert und von dem Halbierungspunkt C aus nach beiden Seiten die halbe Trägerlänge aufträgt. Lotet man nun die Stützpunkte A und B in das Seilpolygon, so wird dasselbe durch Ziehen der Schlufslinie $u\,u_1$ ein geschlossenes und ergibt für den unter Q_3 befindlichen Querschnitt, der ca. 150 mm aus der Trägermitte liegt, ein y_{max}. Dasselbe ist das absolut gröfste, denn die in analoger Weise vorgenommene Untersuchung für den Fall, dafs nach Fig. 82 die beiden Drehgestellachsen und die Triebachse oder nach Fig. 83 die Trieb- und Kuppelachse zwischen den Stützen stehen, ergeben sich kleinere Werte für y_{max}.

Soll der Brückenträger aus zwei I-Eisen bestehen, die in der Normalentfernung von 1435 mm auseinanderliegen, so gilt für die Profilberechnung eines jeden Trägerteiles:

$$y_{max} \cdot H = 2\,W \cdot k$$

oder:

$$W = \frac{y_{max} \cdot H}{2 \cdot k}.$$

Wählt man hierin mit Rücksicht auf etwaige Stofswirkungen $k = 4$ kg pro mm², so ist nach Fig. 81 unter Berücksichtigung der verwendeten Mafstäbe:

$$W = \frac{12 \times 1500 \cdot 10 \times 150}{2 \cdot 4} = 3\,375\,000 \text{ mm}^3.$$

Dem entspricht nach der Normalientabelle für $W = 3\,602\,000$ mm³ ein I-Eisen Pr. Nr. 55.

Eine Nachprüfung der zulässigen Spannung mit Rücksicht auf das Trägereigengewicht erscheint hier unnötig, da letzteres im Vergleich mit den Belastungen sehr klein ausfällt und für jede Trägerhäflte nur etwa 1000 kg beträgt.

Aufgabe 5.

Für einen indirekt belasteten Eisenbahn-Brückenträger von 16 m Spannweite sind die unter den Querstützen auftretenden Maximalmomente zu ermitteln.

Lösung. Die Brückenbelastung ist offenbar am ungünstigsten, sobald sich möglichst viele der schwersten Achsen des Zuges, also Lokomotiv- und Tenderachsen, über die Brücke bewegen. Es sei deshalb die bereits in voriger Aufgabe angeführte ²/₄-gekuppelte Lokomotive und ein dreiachsiger Tender von 33 000 kg Dienstgewicht in Rechnung gesetzt, wobei die sieben Achsen nach den in Fig. 84 eingeschriebenen Mafsen noch gerade zwischen den Stützen A und B stehen können. Bei der Annahme von drei Quer-

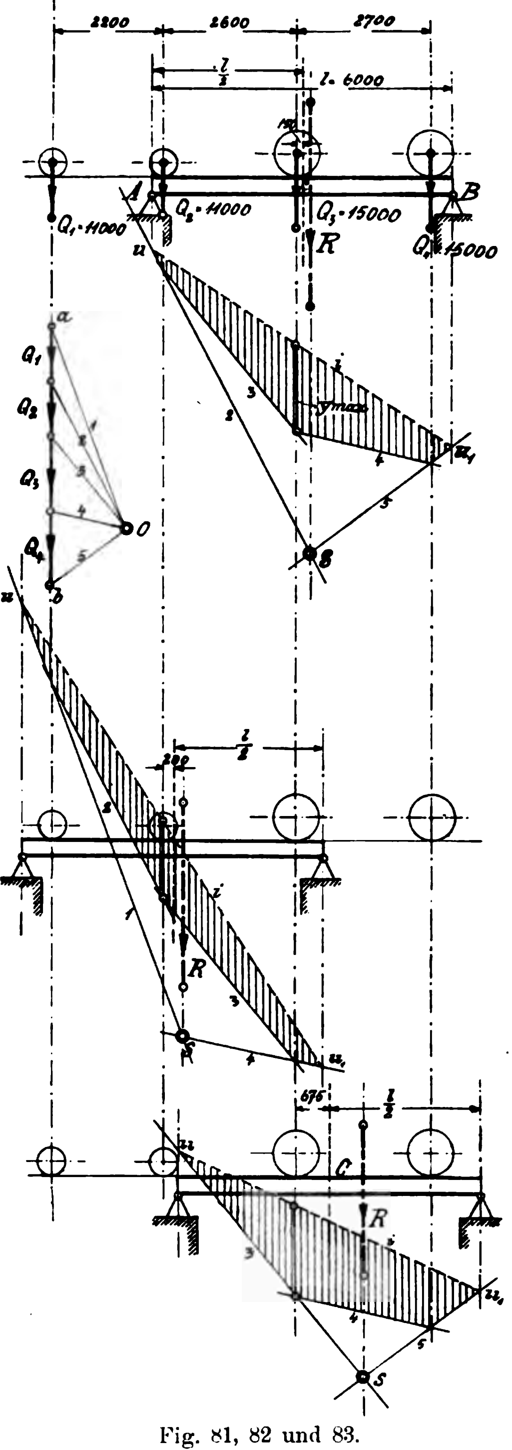


Fig. 81, 82 und 83.

stützen, die in der konstanten Entfernung von 4 m angeordnet sein mögen, wird es nun darauf ankommen, diejenige Last zu ermitteln, die über den Querstützen liegen mufs, um in dem darunter befindlichen Querschnitt des

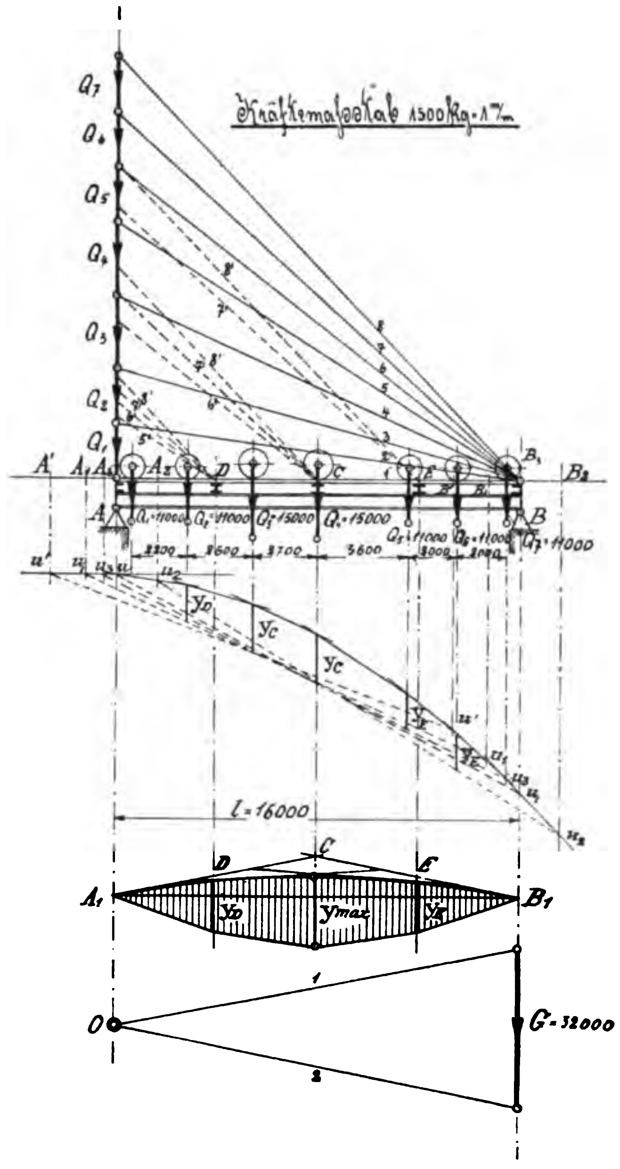


Fig. 84 und 85.

Hauptträgers ein Maximalmoment zu erzeugen. Zu dem Zwecke benutze man das Weyrauchsche Verfahren und untersuche zunächst den Querschnitt C in der Trägermitte. Durch Ziehen des Strahles 8′ ‖ 8 erkennt man, dafs bei allen sieben Lasten Q_4 über C stehen mufs. Zeichnet man

dementsprechend den Träger unter die Lasten und bestimmt nach Konstruktion des Seilpolygones durch Herunterloten der Stützpunkte A und B die Schlufslinie $u\,u$, so ergibt sich das zugehörige y_C.

Für sechs Lasten auf dem Träger deutet der Strahl 7' ∥ 7 an, dafs Q_8 über C ebenfalls ein y_{max} hervorrufen kann. Jedoch zeigt die Stützenverschiebung, dafs bei der gewünschten Lage von Q_8 nur fünf Lasten zwischen den Stützen Platz finden, und dafs das y_C unter Q_8 nicht gröfser wird. Eine entsprechende Untersuchung für die Querschnitte D und E ergibt auch hier die maximalen y_D und y_E, so dafs nun nach Fig. 85 unter $A_1\,B_1$ als Basis die gefundenen y-Ordinaten aufgetragen werden können, worauf sich dann durch Verbindung derer Endpunkte miteinander eine hinreichend genaue Momentenfläche aufzeichnen läfst. Schätzt man das Trägereigengewicht auf ca. 1000 kg, pro 1 m Länge und konstruiert noch für ein Gesamtgewicht $G = 32\,000$ kg über $A_1\,B_1$ die Momentenparabel, so ergibt sich für die Trägermitte:

$$M_C = M_{max} \cdot l = 2\,W \cdot k,$$

also:

$$W = \frac{y_{max} \cdot l}{2 \cdot k},$$

oder für $k = 4$ kg pro mm²:

$$W = \frac{9{,}33 \times 1500 \cdot 53{,}33 \times 300}{2 \cdot 4} = 28\,000\,000 \text{ mm}^3.$$

Für ein derartiges Widerstandsmoment genügt ein I-Eisen gröfster Nummer bei weitem nicht mehr. Der Hauptträger ist deshalb entweder als Fachwerksträger auszubilden oder aus Stehblechen und Winkeleisen als Kastenträger zusammenzunieten.

Fünftes Kapitel.

Das ebene Fachwerk.

§ 13. Einige Methoden zur Ermittlung der Spannungen in Fachwerksgliedern.

Durch Aneinanderreihung einer Anzahl aus Profileisen gebildeter Dreiecke, deren Schwerlinien in einer Ebene liegen, entsteht das ebene Fachwerk. Bei einem solchen — siehe den in Fig. 86 dargestellten, mehrfach armierten Träger — nennt man die Stabreihe, welche die obere Trägerbegrenzung bildet, den Obergurt, während man die untere Stabreihe als Untergurt bezeichnet. Die Verbindung zwischen Ober- und Untergurt wird durch die Wandglieder oder Diagonalen hergestellt, die wieder je nach ihrer Beanspruchung auf Zug der Druck den Namen „Bänder“ oder „Streben“ führen.

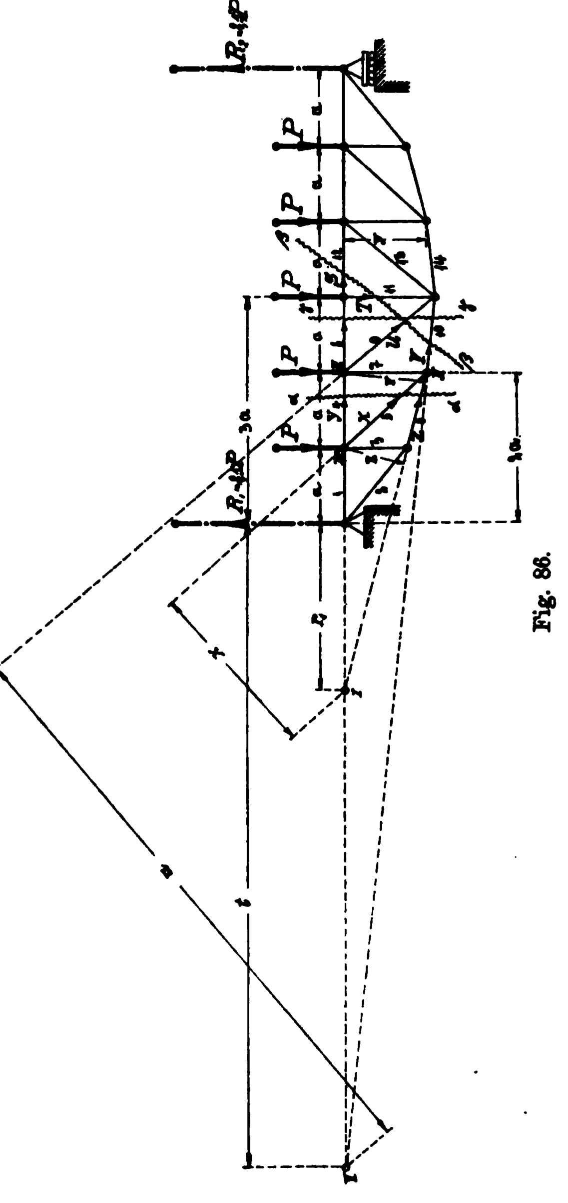
Das Fachwerk dient als Ersatz für einen vollwandigen Träger und gestattet bei gleich grofser Tragfähigkeit einen viel geringeren Materialaufwand, weil bei geeigneter Konstruktion gröfsere Biegungsspannungen vermieden werden können und nur achsiale Spannungen auftreten, welche die Profilstäbe entweder auf Zug oder auf Druck (Zerknicken) beanspruchen. Dies wird erreicht, wenn die Schwerlinien aller in einem Punkte zusammentreffenden Stäbe durch diesen sogenannten Knotenpunkt gehen, und wenn die Stäbe in den Knotenpunkten durch reibungslose Gelenke oder Scharniere miteinander verbunden gedacht werden. Alle den Träger belastenden

äuſseren Kräfte denkt man sich je nach der Form und dem Verwendungszweck des Trägers auf die im Ober- oder Untergurt liegenden Knotenpunkte reduziert, auf welche dann auch noch bei gröſseren Konstruktionen das Trägereigengewicht durch Schätzung mit verteilt werden kann.

Für die in den nachfolgenden Ausführungen behandelten statisch bestimmten, ebenen Fachwerke müssen zur Ermittlung der Spannungen, die in den einzelnen Gliedern von den äuſseren Knotenbelastungen erzeugt worden sind, die drei Gleichgewichtsbedingungen der Statik erfüllt sein.

Es muſs demnach:

1. die algebraische Summe aller horizontalen Kräfte gleich Null sein;
2. die algebraische Summe aller vertikalen Kräfte gleich Null sein;
3. die algebraische Summe der statischen Momente sämtlicher Kräfte bezogen auf irgend einen Punkt gleich Null sein.


Fig. 86.

Der analytische Rechnungsweg zur Bestimmung der inneren Kräfte, der Stabspannungen, gestaltet sich dann am einfachsten mit Hilfe der dritten Gleichgewichtsbedingung durch Aufstellung einer entsprechenden Momentengleichung. Dies soll zunächst mit Benutzung der Fig. 86 für einige Stäbe gezeigt werden, um bei der nachfolgenden graphischen Rechnungsweise im Bedarfsfalle eine Kontrolle ausüben zu können.

Denkt man sich das belastete Fachwerk in a—a durchgeschnitten, so kann offenbar das gestörte Gleichgewicht wiederhergestellt und hierdurch der Zusammensturz der Konstruktion verhindert werden, wenn man an den Schnittstellen äuſsere Kräfte anbringt, die bezüglich ihrer Gröſse und Richtung den vor dem Schnitt vorhandenen,

inneren Spannungen gleich sind. Am linken Trägerteil halten sich dann die fünf Kräfte R_1, P, X, Y und Z das Gleichgewicht, von denen sich beispielsweise direkt die Spannung X des Stabes 5 bestimmen läſst, wenn man den Schnittpunkt der Richtungslinien der beiden mitgeschnittenen Stäbe 4 und 6, nämlich I, als Momentenpunkt wählt. Auf diesen bezogen werden die Momente von Y und Z gleich Null, weil deren Richtungslinien durch I gehen, und es ergibt sich die einfache Gleichung:

$$X \cdot x - R_1 r_1 + P(r_1 + a) = 0,$$

also:

$$X = \frac{R_1 r_1 - P(r_1 + a)}{x}.$$

Ist hierin:

$$R_1 r_1 > P(r_1 + a),$$

so wird X positiv, d. h. die nach der Schnittstelle $\alpha-\alpha$ hin als Zugkraft angenommene Spannung ist tatsächlich eine solche; ist dagegen:

$$R_1 r_1 < P(r_1 + a),$$

so wäre X negativ und deshalb keine Zug-, sondern eine Druckkraft, die bei gröſserer Stablänge für den Stab 5 eine Profilberechnung auf Zerknickung bedingt.

Aus vorstehendem folgt also die einfache Regel, daſs eine positive Spannung als Zug-, eine negative aber als Druckspannung aufzufassen ist.

Um Y zu bestimmen, wird die Momentengleichung für den Knotenpunkt II am einfachsten und lautet:

$$Y \cdot y + R_1 \cdot 2a - P \cdot a = 0,$$

also:

$$Y = \frac{-R_1 \cdot 2a + P \cdot a}{y}.$$

Hierin ist:

$$R_1 2a > P \cdot a,$$

folglich Y negativ, also eine Druckspannung.

Für die Bestimmung von Z wählt man III als Drehpunkt, und erhält aus:

$$-Z \cdot z + R_1 a = 0$$

$$Z = \frac{R_1 a}{z} \text{ kg Zugspannung.}$$

Nicht immer gelingt es, eine derartige Momentengleichung aufzustellen, daſs die zu berechnende Spannung als einzige Unbekannte in derselben ohne weiteres gegeben ist. Dies zeigt sich z. B. bei der Ermittlung der Spannung T im Stabe 11. Zerschneidet man das Fachwerk nach $\beta-\beta$ und denkt sich die den inneren Spannungen gleichwertigen äuſseren Kräfte nach der Schnittstelle hin gerichtet, so wäre für den Drehpunkt IV:

$$T \cdot a - V \cdot v + R_1 \cdot 2a - P \cdot a + P \cdot a = 0$$

und für den Drehpunkt V:

$$U \cdot u + T \cdot (t + 3a) - R_1 t + P(t + a) + P(t + 2a) + P(t + 3a) = 0.$$

In jeder Gleichung kommt auſser T noch eine zweite Unbekannte vor, so daſs die unmittelbare Bestimmung von T unmöglich ist. Man wird deshalb am bequemsten erst V oder U berechnen und zu dem Zwecke etwa den Schnitt $\gamma-\gamma$ zugrunde legen. Dann ist bezogen auf Drehpunkt V:

$$U \cdot u - R_1 t + P(t + a) + P(t + 2a) = 0,$$

also:

$$U = \frac{R_1 t - P(t + a) - P(t + 2a)}{u}$$

oder bezogen auf Punkt IV:

$$- V \cdot v + R_1 \cdot 2a - P \cdot a = 0,$$

folglich:

$$V = \frac{R_1 \cdot 2a - P \cdot a}{v}.$$

In ebenso einfacher Weise lassen sich alle übrigen Stabspannungen feststellen, wobei natürlich nur dann eine mathematische Genauigkeit erwartet werden kann, wenn die Hebelarme der in Rechnung stehenden Momente nicht aus der maſsstäblich entworfenen Zeichnung abgemessen, sondern analytisch bestimmt werden. Letzteres ist unter Umständen recht zeitraubend und geschieht deshalb in der Praxis wohl nur ausnahmsweise.

Noch bedeutend schneller und bei einiger Übung ebenso genau bestimmt die graphische Methode die gesuchten Spannungen der Fachwerksglieder und besitzt gegenüber der Rechnung noch den groſsen Vorzug, daſs ein übersichtliches Bild der ganzen Fachwerksbeanspruchung entsteht.

Von den verschiedenen Verfahren sei hier nur auf das von Cremona näher hingewiesen, welches auf der Überlegung beruht, daſs jeder einzelne Knotenpunkt im Gleichgewicht sein muſs, wenn diese Bedingung für den ganzen Träger erfüllt ist. Demnach müssen sich alle Kräfte, die in einem Knotenpunkt angreifen, äuſsere sowohl als innere, zu einem geschlossenen Kräftepolygon aneinanderreihen lassen. Da in einem solchen der Umfahrungssinn der Pfeile ein stetiger sein muſs, so ergibt sich aus dem Eintragen der Pfeilrichtung die Art der Kraftwirkung. Denkt man sich die ermittelte Spannungslinie an den betrachteten Knotenpunkt gelegt, und zeigt dann der Pfeil auf diesen zu, so ist die Stabspannung eine Druckspannung; zeigt hingegen der Pfeil vom Knotenpunkt weg, so tritt im Stabe eine Zugspannung auf.

Als Beispiel soll nun, so weit wie nötig, für jeden Knotenpunkt des in Fig. 87 dargestellten, mehrfach armierten Trägers das zugehörige Kräftepolygon entworfen und hieran anschlieſsend gezeigt werden, wie sich alle erhaltenen Polygone zu einem sogenannten Kräfteplan vereinigen lassen.

Die in gleicher Entfernung voneinander angeordneten Knotenpunkte des Obergurtes mögen mit je P kg vertikal belastet sein, so daſs die Reaktionen $R_1 = R_2 = 2{,}5\, P$ ihrer Gröſse und Richtung nach ohne weiteres bekannt sind. Man verfährt dann am einfachsten folgendermaſsen:

Man fügt die Kräfte in der Reihenfolge aneinander, in welcher man ihnen bei Umfahrung des Knotenpunktes begegnet, und beginnt mit dem Knotenpunkte, wo nur zwei Stäbe zusammenlaufen; denn ein Kräftepolygon ist nur dann konstruierbar, wenn nicht mehr als zwei unbekannte Stabspannungen zu suchen sind, deren Richtungen gegeben.

Dies ist der Fall im Knotenpunkt I.

Hier halten sich die Reaktion $R_1 = 2{,}5\, P$ und die noch unbekannten Spannungen $1'$ und $2'$ das Gleichgewicht. Umfährt man deshalb diesen Knoten im Sinne des Uhrzeigers, wie auch im Bauplan Fig. 87 angedeutet, so läſst sich, mit der bekannten Reaktion R_1 beginnend, nach Fig. 88 ein geschlossenes Kräftedreieck $R_1\, 1'\, 2'$ aufzeichnen, in welchem die Kraftrichtung von R_1 den Umfahrungssinn der Pfeile bestimmt. Denkt man sich die Spannungslinien $1'$ und $2'$ an den Knoten I gelegt, so erkennt man, daſs $1'$ eine Druck- und $2'$ eine Zugspannung ist. Um diese Spannungen auch im Kräftepolygon

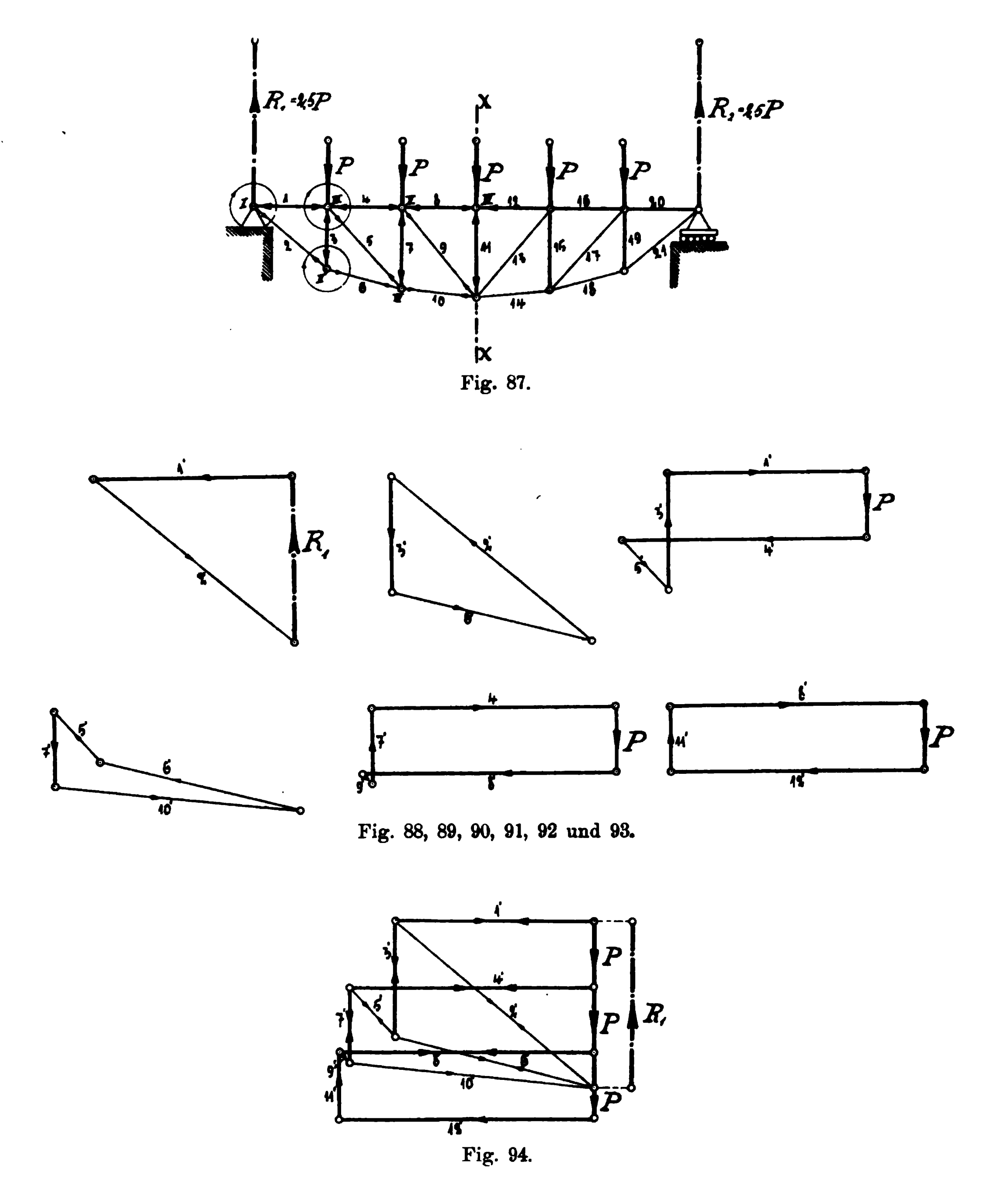


Fig. 87.

Fig. 88, 89, 90, 91, 92 und 93.

Fig. 94.

Fig. 88 voneinander zu unterscheiden, soll die Druckspannung immer durch eine stark ausgezogene, die Zugspannung dagegen durch eine dünn ausgezogene Gerade dargestellt werden.

Nach dem Gesetz der Wechselwirkung ist natürlich 1′ auch Druckspannung für Knoten *III* und 2′ Zugspannung für Knoten *II*, so daſs nur die für Knoten *I* gefundenen Pfeilrichtungen umzukehren sind. Man kann demnach jetzt für den Knoten *II* (Fig. 89) das aus den Kräften 2′, 3′ und 6′ zu bildende geschlossene Kräftedreieck zeichnen, in welchem Spannung 2′ den Richtungssinn von 3′ und 6′ angibt. Dann findet man 3′ als Druck- und 6′ als Zugspannung. Nach Ermittlung der Spannung 3′ läſst sich auch mittels der Fig. 90 das am Knoten *III* wirkende Kräftebüschel zu einem geschlossenen Kräftefünfeck zusammensetzen, indem man mit den bekannten Kräften 3′, 1′ und *P* anfängt und an diese durch Ziehen von 4′ ‖ 4 und 5′ ‖ 5 die Richtungslinien von 4′ und 5′ derartig anreiht, daſs der Endpunkt von 5′ mit dem Anfangspunkt von 3′ zusammenfällt. Dann ergibt sich die Spannung 4′ im Obergurt als Druck- und die Spannung 5′ der Diagonale als Zugspannung. Selbstverständlich ist im allgemeinen eine ganz beliebige Aneinanderreihung der Kräfte zulässig; jedoch empfiehlt es sich, nach einem bestimmten Schema vorzugehen, um schneller und sicherer arbeiten zu können.

Zeichnet man die Spannungsrichtungen von 4′ und 5′ für die benachbarten Knotenpunkte *IV* und *V* in den Bauplan Fig. 87, so zeigt sich, daſs für Knoten *V* noch kein geschlossenes Kräftepolygon entworfen werden kann, weil hier noch drei unbekannte Spannungen 7′, 9′ und 8′ vorhanden sind. Deshalb ist vorerst der Knoten *IV* zu entwickeln, bei welchem man wieder mit der am weitesten links liegenden, bekannten Spannungslinie 6′ anfängt und dann das aus 6′, 5′, 7′ und 10′ gebildete Polygon Fig. 91 aufzeichnet.

Ähnlich bestimmen sich mit Hilfe der Polygone Fig. 92 und Fig. 93 die in den Knotenpunkten *V* und *VI* angreifenden, noch unbekannten Spannungen 9′, 8′ und 11′, so daſs hiermit die Untersuchung für die linke Trägerhälfte erledigt ist. In genau gleicher Weise könnte nun die Spannungsermittlung der Fachwerksglieder auf der rechten Trägerseite vor sich gehen; dieselbe ist aber hier zwecklos, da wegen der symmetrischen Anordnung des Bauwerkes und der gleichen Knotenbelastung die rechts von der Symmetrieebene *X—X* liegenden Stäbe offenbar die gleichen Spannungen aufnehmen müssen als die entsprechend gelagerten Stäbe der anderen Trägerseite.

Behält man das bei den einzelnen Kräftepolygonen beobachtete Anreihungsprinzip bei, so läſst sich noch eine weitere bedeutende Vereinfachung dadurch erreichen, daſs man alle Polygone zu einem in sich geschlossenen Kräfteplan vereinigt, in welchem jede Spannungslinie nur einmal aufgezeichnet zu werden braucht.

Man fängt wieder mit dem äuſsersten Knotenpunkt *I* an und entwirft das Polygon R_1 1′ 2′. Die Berücksichtigung der Pfeilrichtungen von 1′ und 2′ für die Nachbarknotenpunkte *II* und *III* ermöglicht dann das Anreihen des Polygones 2′, 3′, 6′ des Knotens *II* an R_1 1′ 2′, wobei die auch im Kräfteplan umgedrehte Pfeilrichtung von 2′ den Richtungssinn der Spannungen 3′ und 6′ angibt. Ähnlich vollzieht sich die weitere Aneinanderreihung der Knotenpunktspolygone, so daſs schlieſslich der in Fig. 94 dargestellte zusammenhängende Kräfteplan entsteht, der wieder aus vorstehend genannten Gründen nur für eine Trägerhälfte dargestellt ist.

Die richtige Aufzeichnung des Kräfteplanes läſst sich ohne weiteres kontrollieren, indem ein Vergleich des Bauplanes mit dem Kräfteplan die

Regel aufzustellen gestattet, dafs irgendwelche drei Stäbe, die im Bauplan ein Dreieck bilden, im Kräfteplan durch einen und denselben Punkt gehen müssen.

Der Vorzug der graphischen Methode gegenüber der analytischen Behandlung leuchtet auf Grund des vorgeführten Beispieles leicht ein, da bei ganz geringem Flächenaufwand ein übersichtliches Spannungsschema verzeichnet wurde, aus welchem mit Berücksichtigung des Kräftemafsstabes jede Stabspannung direkt abgemessen werden kann.

Soll bei einer ausgeführten Fachwerkskonstruktion nur eine ganz bestimmte Stabspannung nachkontrolliert werden, so empfiehlt sich auch hier,

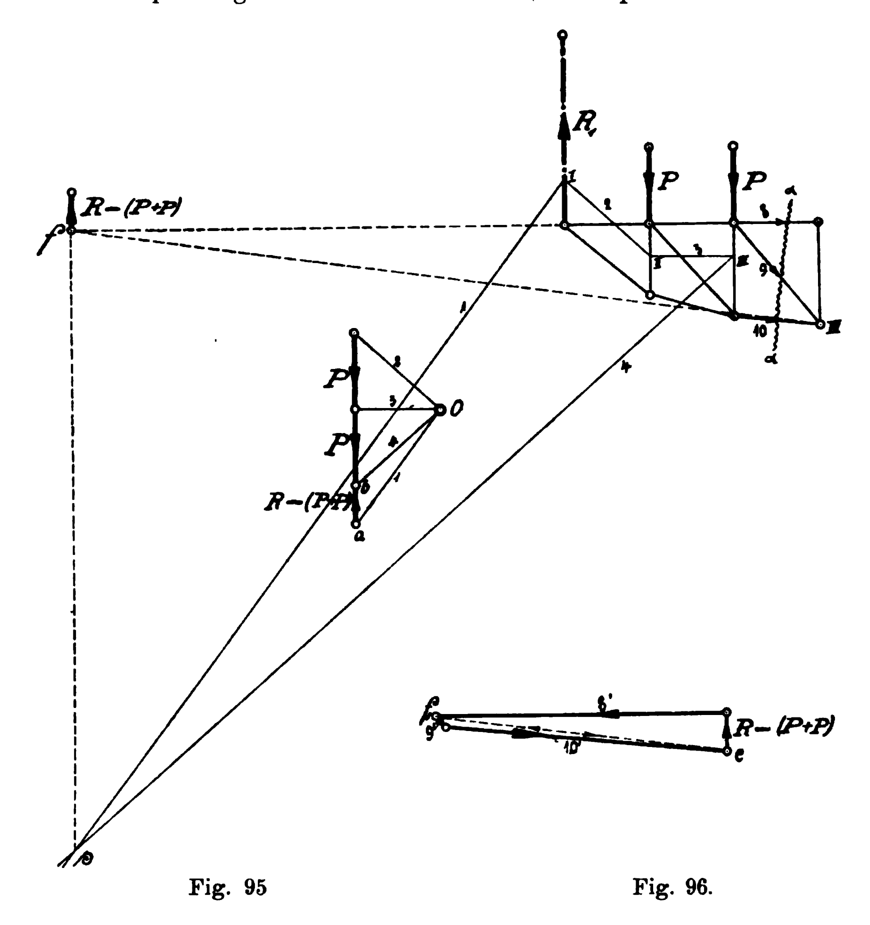


Fig. 95 Fig. 96.

wegen der grofsen Einfachheit den Kräfteplan von irgendeinem Auflager aus so weit zu entwickeln, bis die gesuchte Spannung gefunden ist. Jedoch soll auch noch ein Verfahren mitgeteilt werden, welches die direkte Spannungsbestimmung in irgendeinem Stabe, z. B. Stab 9 in Fig. 95, ermöglicht. Zu dem Zweck führe man einen Schnitt α—α durch das Fachwerk und denke sich das gestörte Gleichgewicht für den linken Trägerteil wiederhergestellt, indem man die in den Stäben 8, 9 und 10 vorhandenen früheren Spannungen durch äufsere Kräfte ersetzt denkt. Die Wirkung

der vertikalen Knotenbelastungen R_1, P und P entspricht dann genau der der Resultierenden $R_1 - (P + P)$, deren Angriffspunkt mit Hilfe des Kräfte- und Seilpolygones als Schnittpunkt s der beiden äufsersten Seilpolygonseiten 1 und 4 gegeben ist. Es mufs somit auch Gleichgewicht zwischen $R_1 - (P + P)$, $8'$, $9'$ und $10'$ herrschen, und die Resultierenden je zwei dieser Kräfte müssen sich in einem Punkte schneiden. Bringt man die Kraftrichtungen von $8'$ mit der von $R_1 - (P + P)$ zum Schnitt, so ist f dieser Punkt, durch welchen auch die Richtungslinie $VIIf$ der Resultierenden von $9'$ und $10'$ gehen mufs. Da nun die Resultierende von $R_1 - (P + P)$ und $8'$ offenbar gleich der von $9'$ und $10'$ und nur entgegengesetzt gerichtet ist, so läfst sich das aus $R_1 - (P + P)$, $8'$, $9'$ und $10'$ zu bildende geschlossene Kräftepolygon konstruieren, indem man nach Fig. 96 zunächst $R_1 - (P + P)$ aufträgt, $8' \parallel 8$ und $e f_1 \parallel VIIf$ zieht. $R_1 - (P + P)$ bestimmt auch die Pfeilrichtung von $8'$, welche der der Resultante $e f_1$ entgegenläuft. Dreht man deshalb für $e f_1$ den Pfeil um, zieht durch e die Spannungslinie $10' \parallel 10$ und durch f_1 die von $9' \parallel 9$ mit nach e gerichteten Pfeilen, so ist mit dem geschlossenen Kräftepolygon $R_1 - (P + P)\, 8'\, 9'\, 10'$ auch die Gröfse und Richtung der gesuchten Spannung $9'$ gefunden, die für den Stab 9 eine Zugspannung bedeutet.

In gleicher Weise läfst sich auch durch passende Schnittführung jede andere Stabspannung ermitteln.

§ 14. Fachwerksberechnung für ruhende und mobile Knotenbelastungen.

Das im vorigen Paragraphen mit so geringen Mitteln abgeleitete Cremonasche Verfahren ergibt, auf einfachere Eisenkonstruktionen angewendet, für die Praxis genügend genaue Resultate. Bei allen zweimal gestützten Fachwerksträgern und Dachbindern, die sich, wie in Fig. 87 durch eine Symmetrieebene $X—X$ in zwei kongruente Hälften zerlegen lassen, und bei denen die Belastung eines jeden zwischen den Stützen liegenden Knotenpunktes die gleiche ist, wird die Aufzeichnung des Spannungsbildes nicht die geringste Schwierigkeit bieten, indem man immer als Vorbild Fig. 94 im Auge behält und mit dem über irgendeinem Auflager liegenden Knotenpunkt beginnt. Zur weiteren Behandlung sollen daher nur einige in ihrer Art typische Fachwerkskonstruktionen gelangen, bei welchen der zugehörige Kräfteplan ein klein wenig von der Schablone abweicht.

Fig. 97 zeigt einen aus sechs quadratischen Feldern gebildeten Träger mit parallelen Gurtungen, bei welchem Nutzlast und Eigengewicht völlig gleichmäfsig auf die Knotenpunkte des Obergurtes verteilt gedacht sind, so dafs alle zwischen den Stützen liegenden Knotenpunkte die gleiche Vertikallast P, die Endknoten a und b dagegen nur je $\frac{P}{2}$ zu tragen haben. Die bei gröfserer Spannweite (Horizontalstützenentfernung) nicht ganz unbedeutende Verlängerung resp. Verkürzung des Trägers infolge von Temperaturschwankungen bedingt die Anordnung eines Lagers, z. B. B als Rollen- oder Gleitlager. Dann können nur noch zu den von Nutz- und Eigenlast erzeugten Normalspannungen solche Spannungen in den einzelnen Fachwerksgliedern hinzukommen, die den durch Temperaturänderungen verursachten Stabverlängerungen oder -verkürzungen direkt proportional sind. Verglichen mit den Hauptspannungen sind diese Zusatzspannungen so gering, dafs sie in den meisten Fällen praktisch vernachlässigt werden dürfen.

Bei der Aufzeichnung des Kräfteplanes Fig. 98 beginnt man mit dem über *A* liegenden Knotenpunkt. Hier sollen sich die vertikal aufwärts gerichtete Kraft 3 *P* und die Spannungen 1′ und 4′ das Gleichgewicht halten. Das Kräftedreieck kann sich in diesem Falle, wo 3 *P* und 1′ in einer Richtung wirken, nur dann schliefsen, wenn die Spannung 4′ gleich Null wird, d. h. wenn das Dreieck in den Kräftezug *c d c* übergeht, in welchem $3\,P = 1'$ sein mufs. Während also der Stab 1 den ganzen Lagerdruck 3 *P*

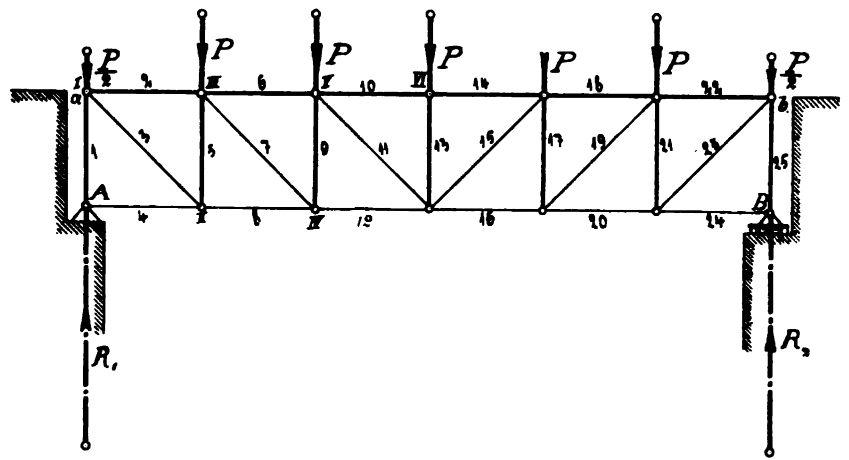


Fig. 97.

aufzunehmen hat, könnte der Stab 4 fehlen. Dasselbe gilt für die Stäbe 25 und 24 der anderen Trägerseite. Geht man nun zum Knotenpunkt *a* über, so müssen sich hier die Kräfte 1′, $\frac{P}{2}$, 2′ und 3′ das Gleichgewicht halten, und es läfst sich das geschlossene Polygon *c d e f c* aufzeichnen, in welchem 1′ und 2′ als Druck-, 3′ dagegen als Zugspannung erhalten wird. In entsprechender Weise geht die weitere Aufzeichnung des Kräfteplanes vor sich.

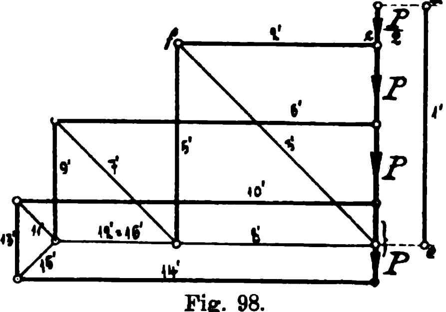


Fig. 98.

Bei dem aus Profileisen zusammengenieteten Ausleger (Gitterkran) in Fig. 99 greift die Nutzlast am freien Ende *d* an, und das Kraneigengewicht ist, wie in Figur ersichtlich, auf die Knotenpunkte des Obergurtes verteilt gedacht. In diesem Falle sind zunächst mittels Kräfteplanes und Seilpolygones die Auflagerreaktionen R_1 und R_2 zu bestimmen, wobei sich ergibt, dafs R_1 vertikal nach aufwärts, R_2 dagegen vertikal nach abwärts gerichtet ist. Unter Benutzung des gleichen Kräftemafsstabes erfolgt jetzt die Aufzeichnung des Kräfteplanes nach Fig. 100, und zwar entweder von dem über Lager *B* liegenden Knotenpunkt oder von der Spitze *d* aus. An beiden Knoten wirken je drei Kräfte, von denen die eine $(R_2 + \frac{G}{2}$ resp. *P*) der Gröfse und Richtung nach bereits bekannt

ist, die beiden anderen dagegen nur in ihren Richtungen gegeben sind. Hier sei von Knotenpunkt *d* aus angefangen. Das geschlossene Kräftedreieck

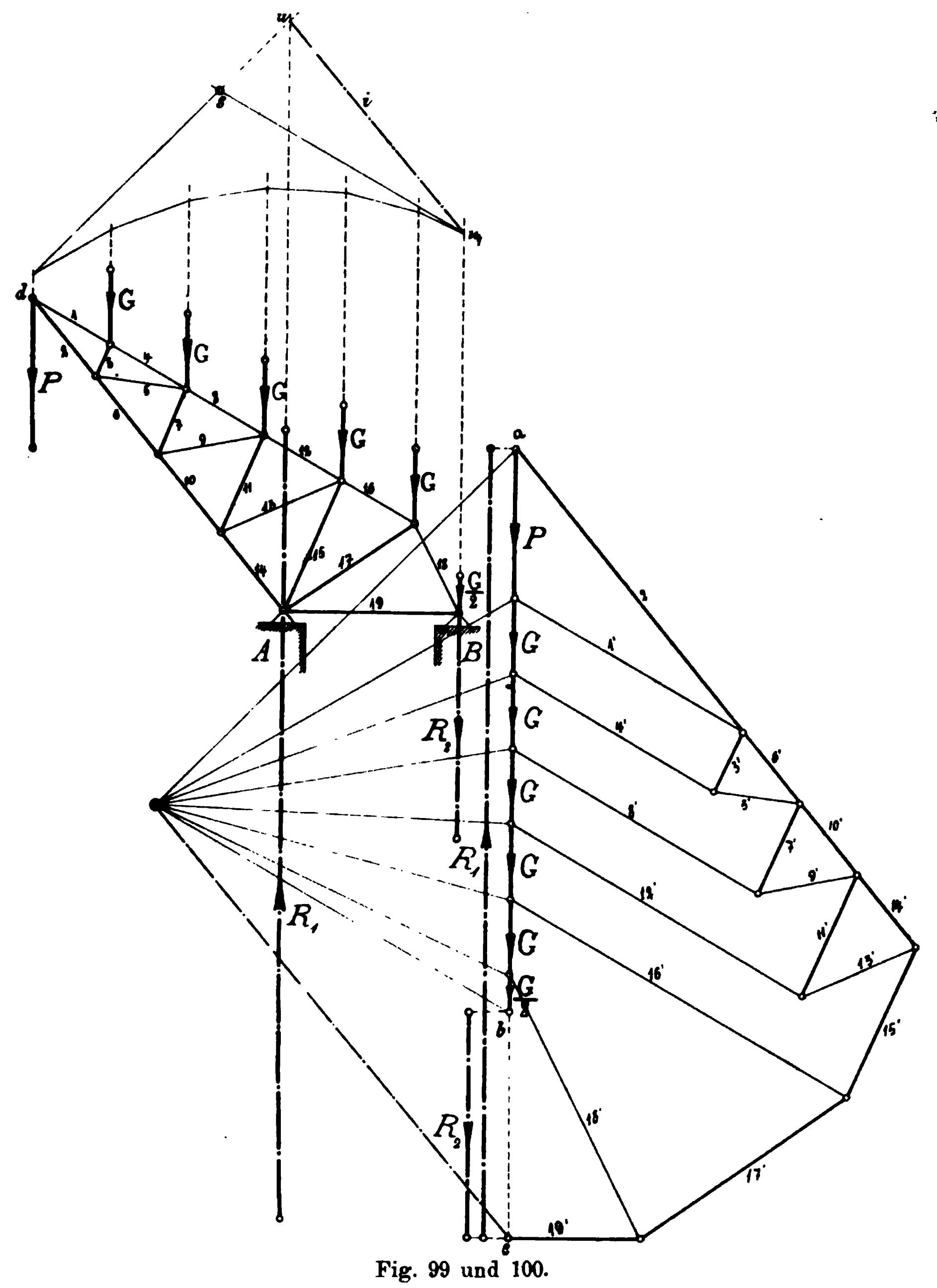


Fig. 99 und 100.

ergibt dann 1′ als Zug- und 2′ als Druckspannung. Immer zu dem Knotenpunkt übergehend, bei dem nicht mehr als zwei Spannungen unbekannt

sind, erfolgt nun die weitere Anreihung der Kräftepolygone zu einem zusammenhängenden Kräfteplan nach Fig. 100. Für die Untergurtstäbe 2, 6, 10 und 14, die Diagonalen 3, 7, 11, 15 und 17 und den Horizontalstab 19 ergeben sich dann Druckspannungen, während alle übrigen Stäbe auf Zug beansprucht werden.

Der in Fig. 101 dargestellte, sogenannte Finkträger besteht aus zwei gleichschenkligen, vertikal verstrebten Dreiecksträgern, die im Zusammenstofspunkt C durch Strebe 6 und die beiden Zugstangen 9 und 10 armiert sind. Nur die eigentlichen Knotenpunkte sind in der auch in früheren

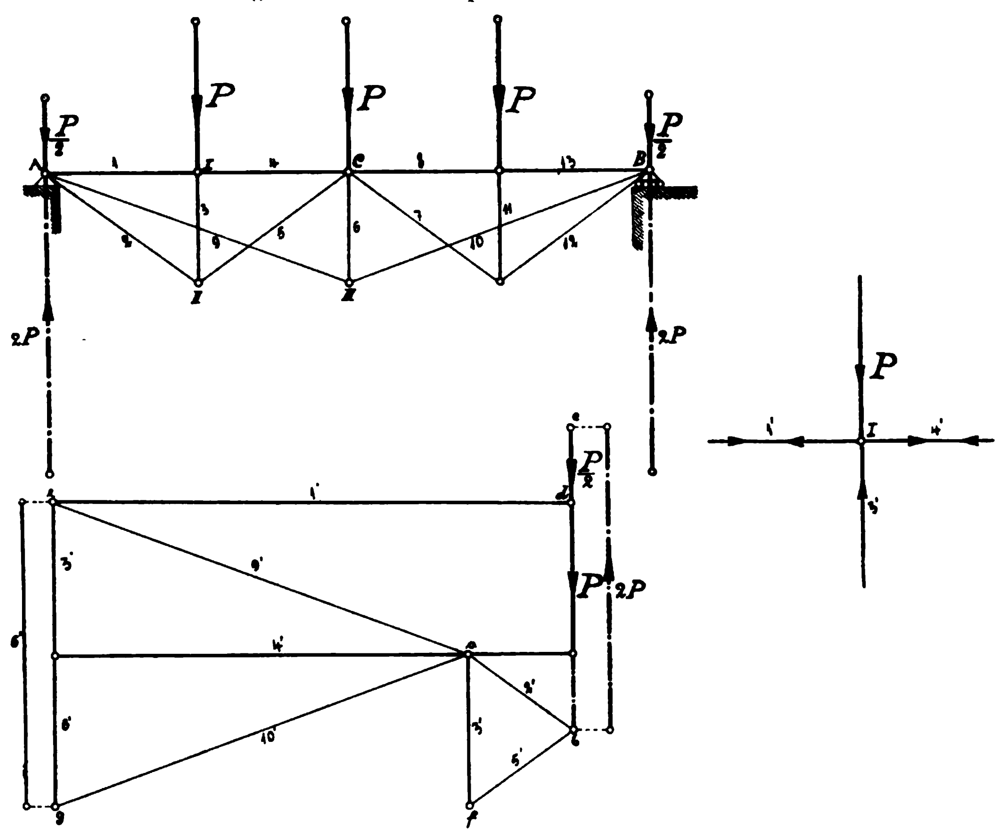


Fig. 101, 102 und 103.

Beispielen durchgeführten Weise durch Nullkreise markiert; die Armierungsbänder 9 und 10 müssen demnach an den Stäben 3 und 5 resp. 7 und 11 seitlich vorbeigehen.

Angenommen sei wieder eine gleichmäfsige Lastverteilung, so dafs die Reaktionen $R_1 = R_2 = 2\,P - \frac{P}{2}$ direkt bekannt sind. Die Konstruktion läfst dann erkennen, dafs bei Aufzeichnung des Kräfteplanes Fig. 103 nicht mit den über den Lagern A und B liegenden Knoten angefangen werden kann, da hier drei unbekannte Spannungen vorkommen. Auch der Knotenpunkt I ist hierzu nicht geeignet, obgleich man nach Fig 102 direkt einsehen wird, dafs an diesem nur dann Gleichgewicht herrscht, wenn $P = 3'$ und $1' = 4'$

ist. Die im allgemeinen beliebig grofse Zug- oder Druckspannung 1′ ist aber hier erst später am Knotenpunkt *A* bestimmbar.

Nach der Erkenntnis, dafs Spannung 3′ = *P* eine Druckspannung sein mufs, läfst sich das zum Knoten *II* gehörige Kräftedreieck *a b f* aufzeichnen, so dafs nunmehr auch die Zugspannungen 2′ und 5′ gegeben sind. Jetzt wird man zum Knoten *A* übergehen und hier mit Hilfe des Polygones *a b c d e a* die Zugspannung 9′ und die Druckspannung 1′ erhalten. Mit der letzteren ist auch die gleich grofse Spannung 4′ gegeben, so dafs nur noch für den Knotenpunkt *III* mittels des Kräftedreiecks *a e g* die Streben-

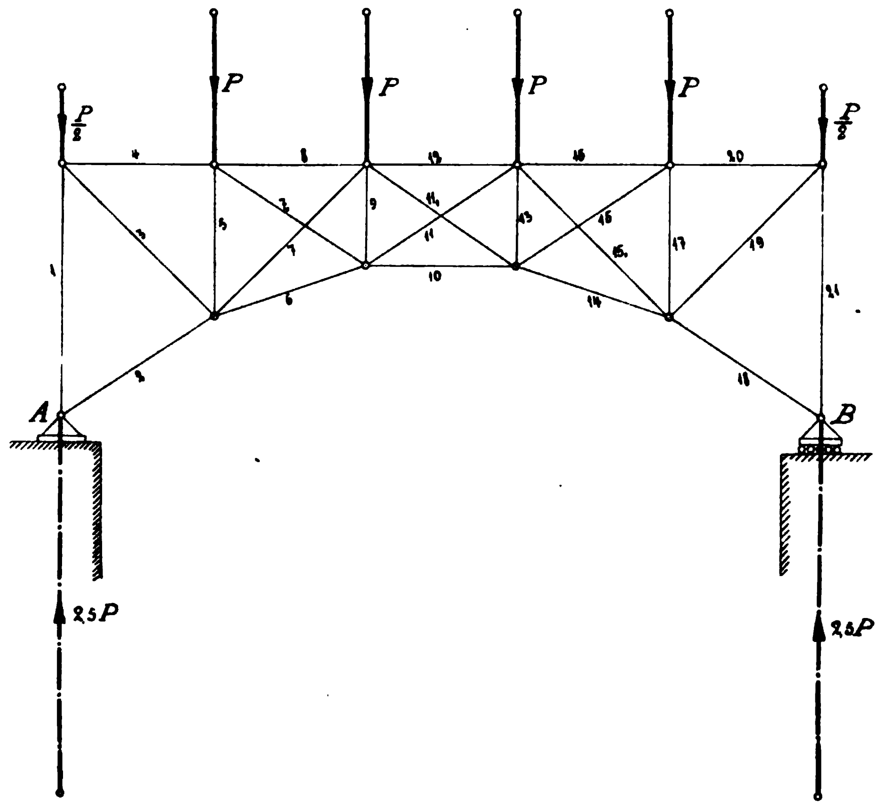


Fig. 104.

spannung 6′ zu bestimmen ist. Hiermit ist die Untersuchung beendet, da die gleichliegenden Stäbe der anderen Trägerhälfte wieder dieselben Spannungen erhalten.

Etwas umständlicher ist die Spannungsermittlung der Fachwerksglieder, wenn bei einzelnen Feldern eines Trägers gekreuzte Diagonalen angewendet werden. Eine direkte Aufzeichnung des Gesamtkräfteplanes ist in diesem Falle nicht möglich, da an den betrachteten Knotenpunkten meist mehr als zwei unbekannte Spannungen angreifen. Bei dem in Fig. 104 dargestellten Bogenträger wäre man deshalb nur imstande, die Spannungen 1′, 2′, 3′ und 4′ resp. 18′ 19′, 20′ und 21′ unmittelbar aufzuzeichnen, während für die Ermittlung aller übrigen Spannungen ein anderer Weg eingeschlagen werden mufs.

Man geht nun am einfachsten in der Weise vor, dafs man den Träger in Fig. 104 in zwei Teilträger, Fig. 105 und Fig. 107, zerlegt, deren Obergurtknoten nur die Hälfte der wirklichen Belastung aufnehmen und dann die zugehörigen Teilkräftepläne aufzeichnet.

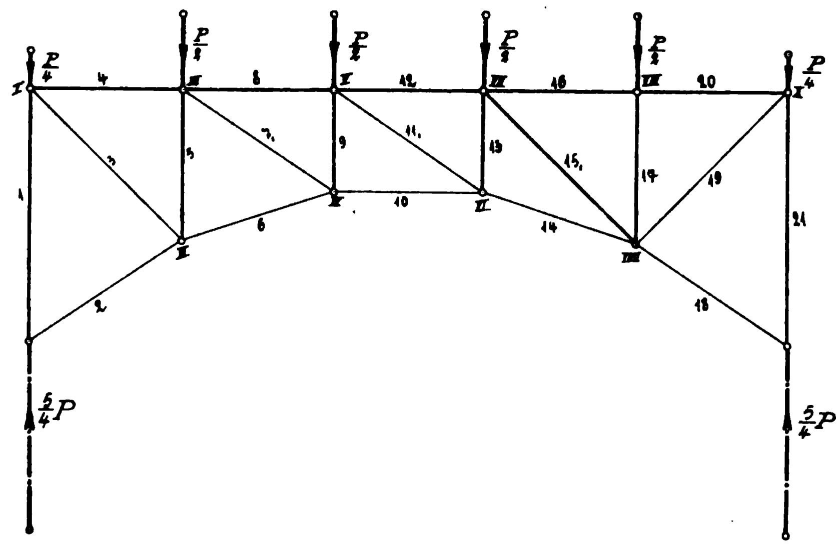


Fig. 105.

Da die Teilträger keine Symmetrieebene besitzen, so mufs diese Aufzeichnung nach den Fig. 106 und 108 vollständig durchgeführt werden. Man erhält dann die wirklichen Spannungen der Gurtstäbe sowie der Vertikalen 1, 5, 9, 13, 17 und 21, indem man die in den Einzelkräfteplänen, Fig. 106 und 108, ermittelten Spannungen mit Rücksicht auf den gewählten Kräftemafsstab algebraisch addiert. Die Diagonal-Spannungen 7', $7_1'$, 11', $11_1'$ und 15', $15_1'$ werden einzeln aus den Kräfteplänen abgegriffen, wobei noch zu bemerken ist, dafs im vorliegenden Beispiel die Stäbe 11 und 11_1 spannungslos bleiben, also ganz fehlen könnten. Letzteres gilt auch für die Stäbe 2 und 18.

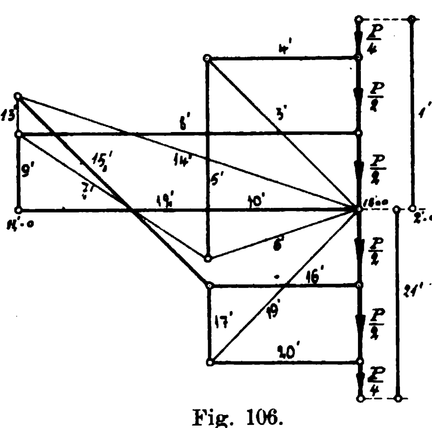


Fig. 106.

Sehr zu empfehlen ist, dafs alle den Kräfteplänen entnommenen Spannungen, wie bei den später folgenden Zahlenbeispielen gezeigt wird, tabellarisch zusammengestellt werden; denn die so gewonnene Spannungstabelle ergibt nicht nur eine gröfsere Übersicht, sondern schliefst auch spätere Mefsfehler aus, welche bei der den Temperatureinflüssen unterliegenden Zeichnung unvermeidlich sind.

Bei den bis jetzt besprochenen Beispielen sind nur ruhende, unveränderliche Knotenpunktsbelastungen angenommen worden, die sich aus

Nutzlast und Eigengewicht zusammensetzten. Findet nun ein Fachwerksträger bei einer Brückenkonstruktion Verwendung, so kommt als ruhende, konstante Belastung nur das auf den Träger entfallende Brückeneigengewicht in Betracht, wogegen neben der Nutzlast auch noch der Schneedruck als

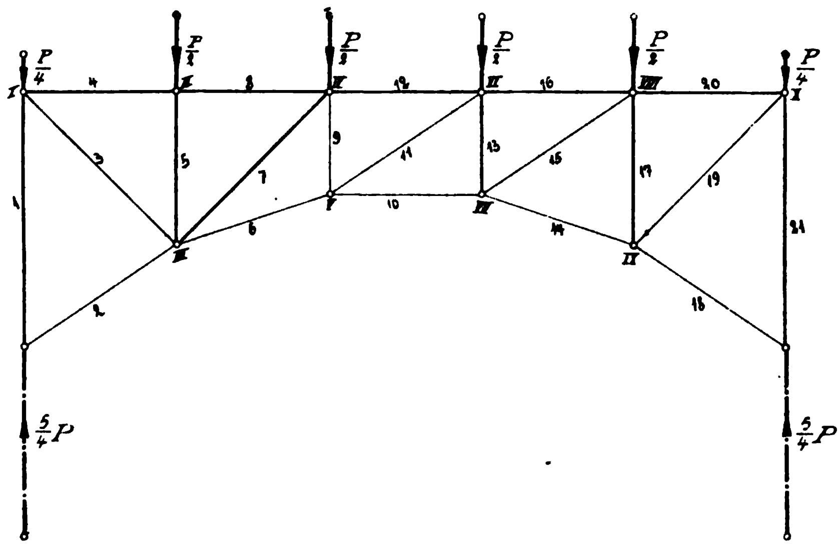


Fig. 107.

zufällige, veränderliche Belastung aufzufassen wäre. Die Gröfse der wandernden Nutzlast richtet sich nach der Art des Verkehrs, dem die Brücke dient, und mufs dementsprechend geschätzt werden. Ist dieses geschehen, so läfst sich durch Anfertigung einer passenden Anzahl von Kräfteplänen der Einflufs der in verschiedene Lagen gebrachten Nutzlast auf die Stabspannungen feststellen.

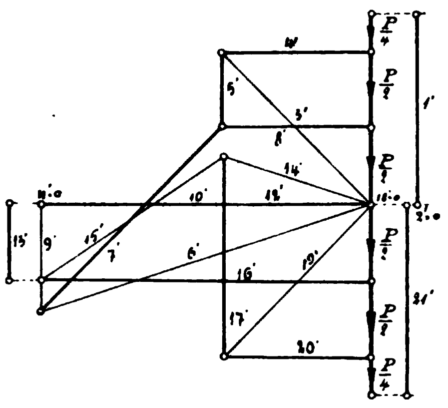


Fig. 108.

Der bei höchstem Schneefall von ca. 600 mm ungefähr 75 kg pro m² Horizontalfläche betragende Schneedruck wird bei der Spannungsermittlung des Trägers am einfachsten als ständige Knotenlast mit in Rechnung gezogen und zu der Eigenlast addiert. Dann läfst sich auch der zu den ruhenden Knotenlasten gehörige Kräfteplan aufzeichnen und die in irgendeinem Stabe auftretende Maximalspannung ermitteln, indem man die durch die ruhenden Lasten erzeugte Spannung zu der von der wandernden Nutzlast herrührenden gröfsten Spannung algebraisch addiert.

Dieses für leichte Brückenträger mit geringer Spannweite noch genügend genaue Verfahren ist so einfach, dafs wohl von einer besonderen Figur hier abgesehen werden kann. Es sei wieder auf ein späteres Zahlenbeispiel verwiesen.

Etwas abweichend wie beim Brückenträger liegen die Verhältnisse bei den Dachbindern, d. h. solchen Fachwerkskonstruktionen, welche die Querhölzer (Pfetten), den Bretterbelag und die Eindeckung eines Daches zu tragen haben. Als zufällige, veränderliche Belastung spielt hier neben der ruhenden Eigengewichts- und Schneebelastung der Winddruck noch eine Rolle, und zwar eine um so gröfsere, je gröfser der Neigungswinkel α des Daches gegen die Horizontale ist. Der Einfachheit halber wird man aber auch hier die Spannungsermittlung der einzelnen Fachwerksglieder mit erhöhter Sicherheit unter der Annahme vornehmen, dafs alle erwähnten Belastungen gleichzeitig und in ganzer Gröfse auftreten. Hierbei ist jedoch zu bemerken, dafs die volle Schneelast nur bei geringeren Dachneigungen unter $\alpha = 40^0$ mit 75 kg pro m² Grundrifsfläche einzusetzen ist. Wird

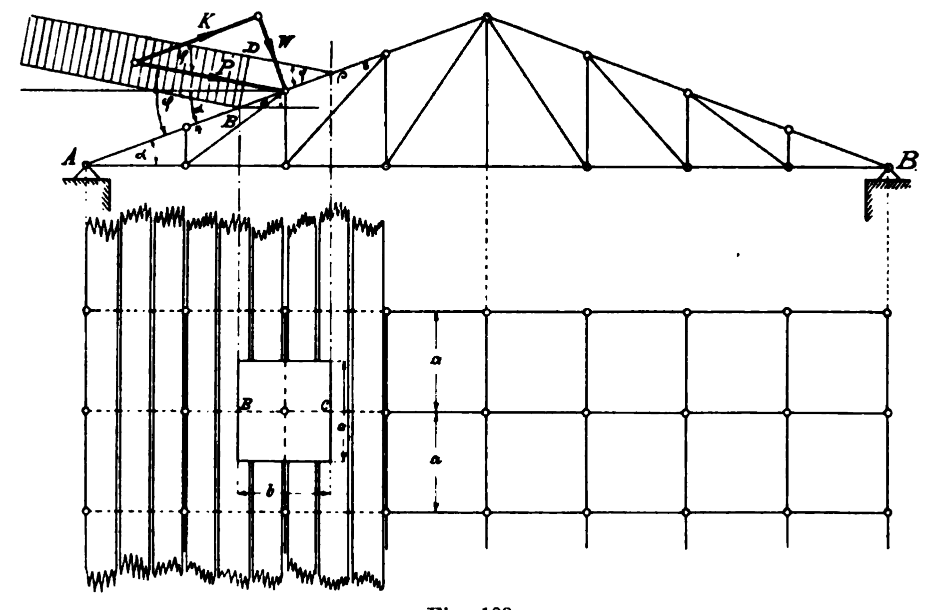


Fig. 109.

$\alpha > 40^0$, aber $< 50^0$, so rechnet man nur die Hälfte des angegebenen Wertes, und bei $\alpha > 50^0$ braucht die Schneelast überhaupt nicht berücksichtigt zu werden, da der Schnee dann nicht mehr auf der schiefen Ebene liegen bleibt.

Da der Wind entweder die linke oder die rechte Dachseite treffen kann, so wird man drei Kräftepläne anfertigen. Einen in der bekannten Weise für die durch Eigengewicht und Schneelast erzeugten vertikalen Knotenlasten, einen anderen für Winddruck links und einen dritten für Winddruck rechts. Dann wird man die gröfsere der durch links- oder rechtsseitigen Winddruck erzeugten Stabspannung zu derjenigen addieren, die sich aus dem für die Vertikallasten verzeichneten Kräfteplan ergeben hat.

Zur Berechnung des auf jeden Knotenpunkt eines Binders entfallenden Winddruckes diene Fig. 109.

Die Richtung des Windes bildet erfahrungsgemäfs mit der Horizontalen

einen Winkel von ca. 10° und dementsprechend mit der um α geneigten Dachfläche einen solchen von:

$$\varphi = \alpha + 10^0.$$

Sind nun nach Fig. 109 B und C die Stabmitten von 4 und 8 und ist a die Binderentfernung voneinander, so wird die Dachfläche $a \cdot \overline{BC}$ durch ein Windprisma vom Querschnitt:

$$a \cdot \overline{BD} = a \cdot \overline{BC} \cdot \sin \varphi$$

gedrückt.

Bedeutet deshalb p den Einheitsdruck, d. h. den Druck auf eine zur Windrichtung senkrecht stehende Fläche von 1 m², so ist der Winddruck gegen die Dachfläche $a \cdot \overline{BC}$:

$$P = p \cdot a \cdot \overline{BD} = p \cdot a \cdot \overline{BC} \cdot \sin \varphi \text{ kg}.$$

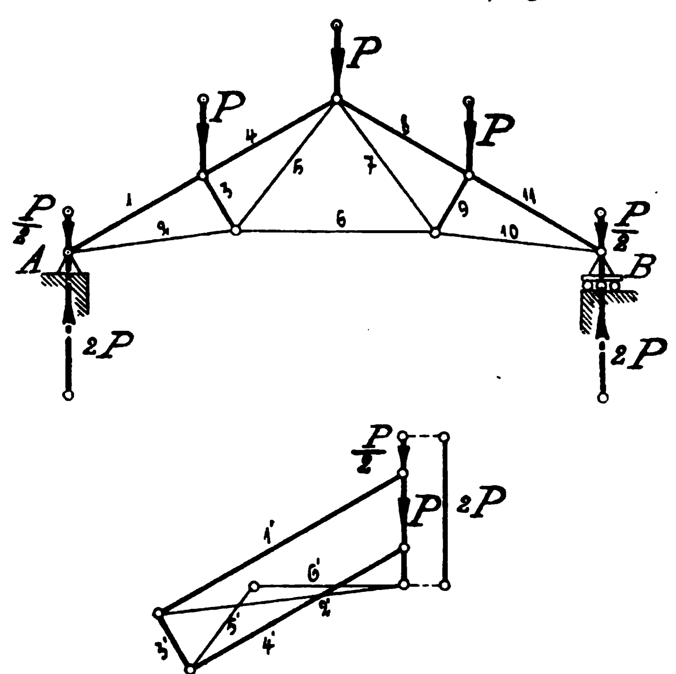


Fig. 110 und 111.

Hierin kann p im Mittel mit:

$$p = 150 \text{ kg pro m}^2$$

angenommen werden. Nur ausnahmsweise an Stellen, die dem Winde ganz besonders ausgesetzt sind, geht man bis zu:

$$p = 250 \text{ kg pro m}^2.$$

Zerlegt man P in eine Komponente K parallel zur Dachfläche und eine andere W senkrecht dazu, so kann erstere vernachlässigt werden, wenn man die Reibung des Windes gegen die Dachfläche gleich Null setzt. Demnach kommt als Knotenbelastung nur W in Betracht. Dieses bestimmt sich aus der Figur zu:

$$W = P \cdot \sin \varphi$$

oder:

$$W = p \cdot a \cdot \overline{BC} \cdot \sin \varphi \cdot \sin \varphi$$

oder als Mittelwert:

$$W = 150 \cdot a \cdot \overline{BC} \cdot \sin^2 \cdot \varphi \text{ kg}.$$

Man wird also zur Bestimmung von W den Neigungswinkel φ der Windrichtung zur Horizontalen und die Knotenpunktsabstände $\overline{BC}$ dem maſsstäblich entworfenen Bauplan zu entnehmen haben und das ausgerechnete Produkt $\overline{BC} \cdot \sin^2 \cdot \varphi$ mit dem im allgemeinen für einen bestimmten Dachstuhl konstanten Wert $150\,a$ multiplizieren.

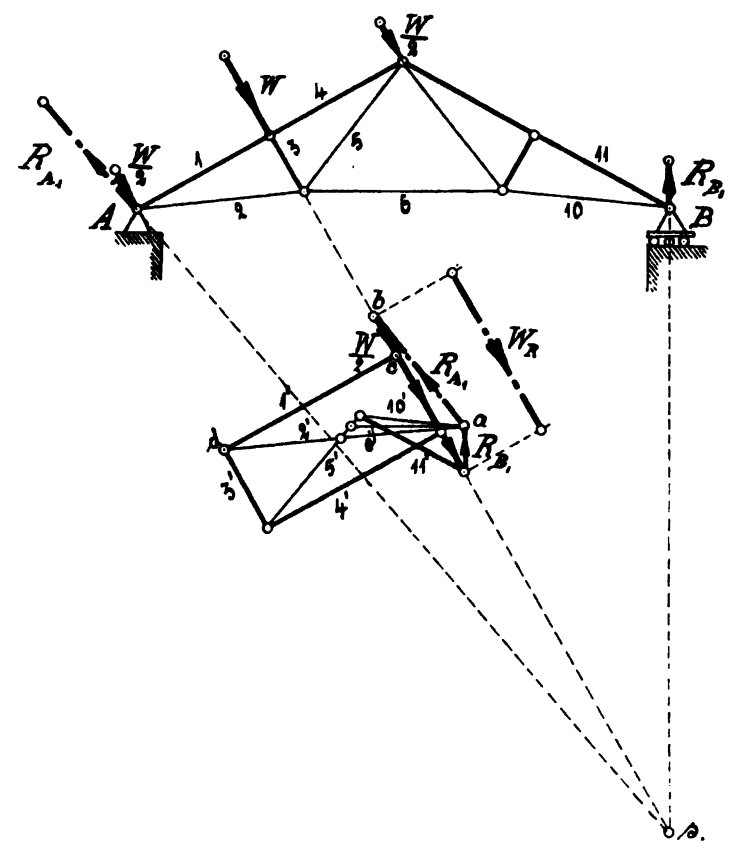


Fig. 112 und 113.

In den Fig. 110 bis 115 ist die Aufzeichnung der Kräftepläne eines Polonceau-Binders für Eigengewicht und Schneelast (Fig. 110 und 111), für Winddruck links (Fig. 112 und 113) und Winddruck rechts (Fig. 114 und 115) durchgeführt. Infolge der zur Dachfläche senkrechten Winddrücke lassen sich die Stützreaktionen ihrer Gröſse und Richtung nach nur dann genau bestimmen, wenn ein Lager, z. B. B, als bewegliches Gleit- oder Rollenlager konstruiert wird. Der im letzteren auftretende Stützdruck kann dann, wenn man von der unbedeutenden Reibung absieht, als vertikal gerichtet angenommen werden.

Bringt man deshalb die Resultierende W_R aller Winddrücke zum Schnitt s mit dem Vertikalstützdruck, so mufs durch diesen Schnittpunkt auch die Richtungslinie des anderen Stützdruckes bei A gehen, da sonst kein Gleichgewicht herrschen kann. Hiermit sind auch die Richtungen der Reaktionen R_{A_1} und R_{A_2} resp. R_{B_1} und R_{B_2} gegeben, deren Gröfsen man mittels der geschlossenen Kräftedreiecke in Fig. 113 und 115 erhält.

Kommt der Wind von der linken Seite, so müssen sich an der rechten, unbelasteten Binderhälfte die drei durch B gehenden Kräfte R_{B_1}, 10′ und 11′ das Gleichgewicht halten, infolgedessen hier alle übrigen Stabspannungen gleich Null sind. Die Aufzeichnung des Kräfteplanes beginnt nun bei Lager A, wo die Kräfte R_{A_1}, $\frac{W_1}{2}$ 1′ und 2′ angreifen, welche das Polygon

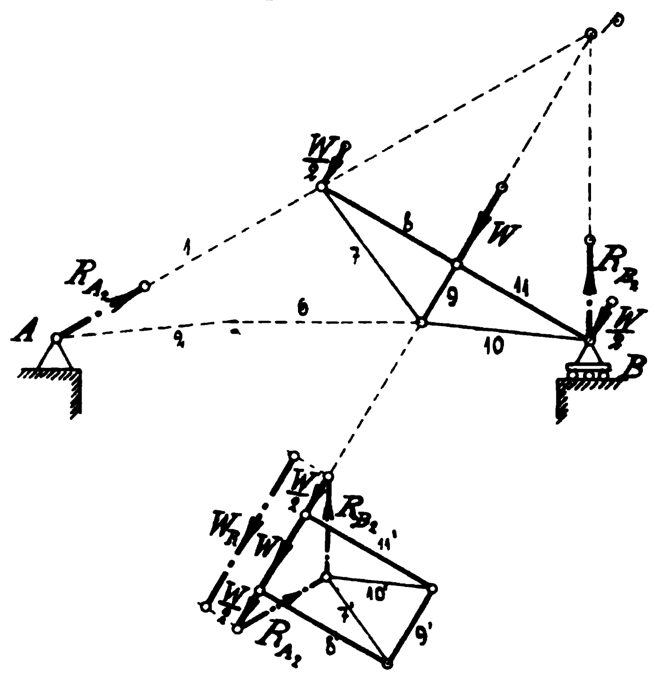


Fig. 114 und 115.

a b c d a ergeben, und ist in der bekannten Weise zu Ende zu führen, bis die Spannungen 1′, 2′, 3′, 4′, 5′, 6′, 10′ und 11′ ermittelt sind. Siehe Fig. 113. In analoger Weise verfährt man nach Fig. 114 und 115, wenn der Wind von rechts auf die Dachfläche einwirkt. Nur ist in der Zeichnung zufällig der Sonderfall aufgetreten, dafs die Reaktion R_{A_2} mit der Spannungsrichtung von 1′ zusammenfällt, wodurch sich im Kräfteplan Fig. 115 die Spannungen 2′ und 6′ gleich Null ergeben, während im Stabe 1, der jetzt die ganze rechte Binderhälfte zu stützen hat, eine Druckspannung $1' = R_{A_2}$ herrscht.

§ 15. Durchrechnung einiger Zahlenbeispiele.

Aufgabe 1.

Für eine Fufsgängerbrücke von 8 m Spannweite und 2 m Breite sollen die in beiden Bogensehnenträgern auftretenden Maximalspannungen bestimmt werden.

Lösung. Die auf dem Untergurt der Träger (Fig. 116) ruhenden Querschwellen seien direkt über den gelenkig gedachten Knotenpunkten *A*, *II*, *IV*, *V*, *VI* und *B* gelagert, so dafs im Gurt keine Biegungsspannungen auftreten können. Nur die Querschwellen und die auf diesen ruhenden Langschwellen werden durch den Bodenbelag und die Verkehrslast auf

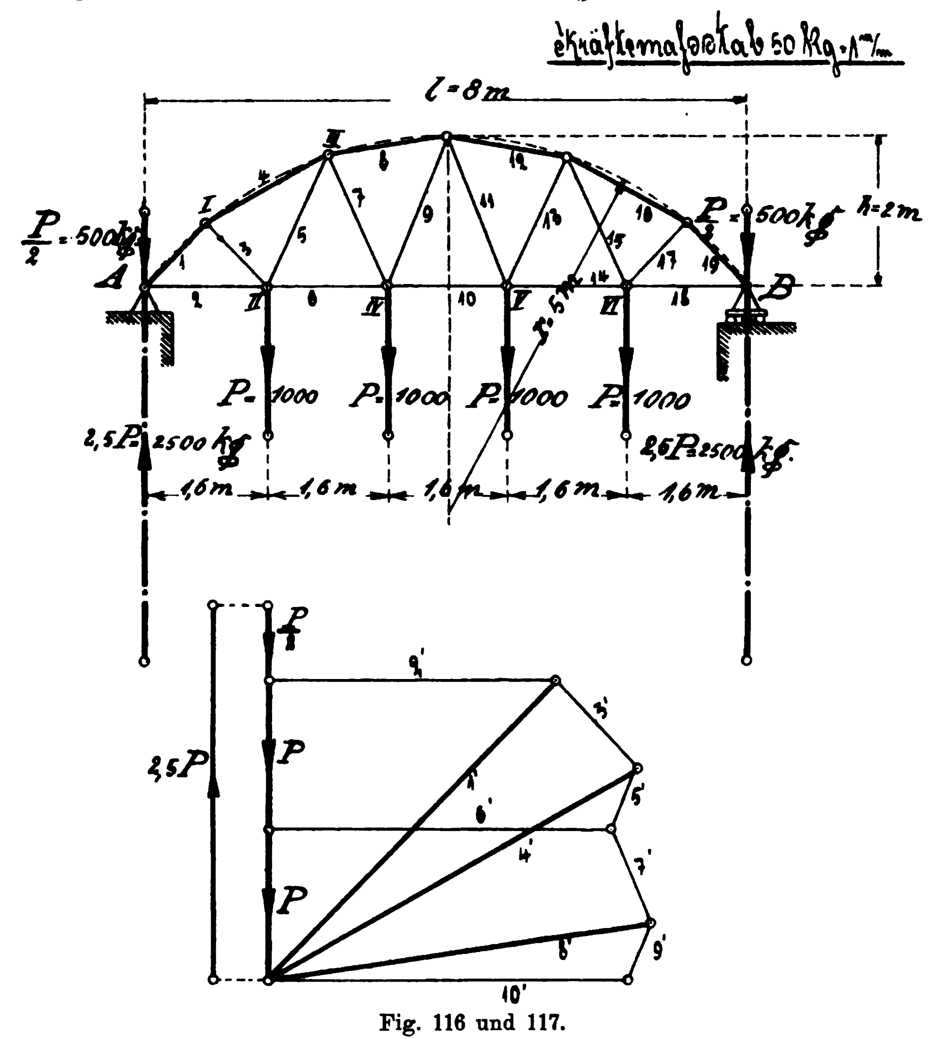


Fig. 116 und 117.

Biegung beansprucht. Für die Bestimmung des Eigengewichts kleiner Fufswegbrücken in kg pro laufendes Meter genügt dann die Erfahrungsformel:

$$p = 120\,b + 1{,}5\,l^2 + 60 \text{ kg},$$

worin *b* die Brückenbreite in m und *l* die Stützweite in m bedeutet. Hier wäre demnach:

$$p = 120 \cdot 2 + 1{,}5 \cdot 8^2 + 60 = 396 \text{ kg}$$

und das ganze Brückengewicht:

$$G = 396 \cdot 8 = 3168 \text{ kg}.$$

Die Verkehrslast wird ein Maximum bei Menschengedränge, in welchem Falle man pro 1 m^2 Grundfläche ca. 400 kg Belastung rechnen kann. Betrachtet man diese Verkehrslast als ruhend, was wohl bei kleinen Brücken mit geringer Spannweite noch zulässig ist, so kommt für eine Gesamtgrundfläche pro 16 m^2 zum Brückengewicht $G = 3168$ kg noch $G_1 = 400 \cdot 16 = 6400$ kg, und die Gesamtbrückenbelastung erhöht sich auf:

$$Q = G + G_1 = 3168 + 6400 = \backsim 10000 \text{ kg}.$$

Auf jeden Träger entfällt deshalb 5000 kg, wobei die zwischen den Stützen liegenden Knotenpunkte je 1000 kg, die über den Lagern befindlichen je 500 kg aufzunehmen haben.

Der den Obergurtstäben umschriebene Bogen gehört einem Kreise von $r = 5$ m Radius an, und die Bogenhöhe beträgt $h = 2$ m. Für die Aufzeichnung des Bau- und Kräfteplanes sei ein Längenmafsstab 1 : 100 und ein Kräftemafsstab 1 mm = 50 kg gewählt. Der Kräfteplan Fig. 117 läfst dann erkennen, dafs der Bogenträger eine sehr günstige Fachwerksverbindung darstellt, denn nur die Obergurtstäbe werden auf Druck (Zerknicken) beansprucht, während alle übrigen Stäbe Zugspannungen erleiden.

Die Gröfse der einzelnen Stabspannungen ist der nebenstehenden Tabelle zu entnehmen.

Spannungstabelle.

Stab Nr.	Zug in kg	Druck in kg	Stab Nr.
1	—	2770	19
2	1910	—	18
3	800	—	17
4	—	2840	16
5	450	—	15
6	2280	—	14
7	675	—	13
8	—	2575	12
9	410	—	11
10	2390	—	10

Aufgabe 2.

Bei einem Laufkran von $l = 6$ m Spannweite sei die Maximallast inkl. Laufkatzengewicht $Q = 4000$ kg. Der Radstand betrage $l_1 = 1$ m.

Welche Normalspannungen treten in den beiden Fachwerksträgern auf, deren Vertikalstreben die konstante Entfernung von 1 m voneinander besitzen? Die Trägerhöhe sei $h = 0{,}6$ m.

Lösung. Schätzt man das Eigengewicht der Brücke auf $^3/_4\, Q = {}^3/_4 \cdot 4000 = 3000$ kg, so entfällt auf jeden Träger 1500 kg. Die Knotenpunkte, die zwischen den als Stützen dienenden Laufrädern der Brücke liegen, mögen dann mit je $G = 250$ kg und die über den Stützen A und B mit je $\frac{G}{2} = 125$ kg belastet sein. Dann lassen sich zunächs mittels des Kräfteplanes Fig. 119 unter Zuhilfenahme des Bauplanes Fig. 118 die vom Trägereigengewicht herrührenden Stabspannungen ermitteln, wobei der Kräfteplan nur zur Hälfte aufgezeichnet zu werden braucht, da die Belastung eine gleichmäfsig verteilte ist und der Träger eine Symmetrieebene besitzt.

Die Laufkatze kann innerhalb der Stellungen I und III verschoben werden (Fig. 120), erzeugt jedoch infolge der symmetrischen Anordnung des Trägers zwischen den Lagen II und III auf der rechten Trägerhälfte die gleichen Stabspannungen wie bei der Verschiebung zwischen I und II auf der linken Seite. Eine sehr genaue Untersuchung erfordert nun die Annahme möglichst vieler Katzenstellungen und die Aufzeichnung der zu-

gehörigen Kräftepläne. Bei gröfserer Ausladung und mehreren Feldern würde man, von der Grenzlage I ausgehend, die Katze vielleicht jedesmal um die halbe Feldweite $\frac{l_1}{2}$ verschieben, bis die Mittellage II erreicht ist. Im vorliegenden Falle würde man also bei vier Katzenstellungen eine sehr genaue Beurteilung der Stabspannungen vornehmen können, jedoch ermöglicht auch schon die Betrachtung der Endlagen I und II die Aufstellung einer für praktische Rechnungen genügend genauen Spannungstabelle.

Da die Laufkatze vier Räder besitzt, von welchen jedes einen Achs-

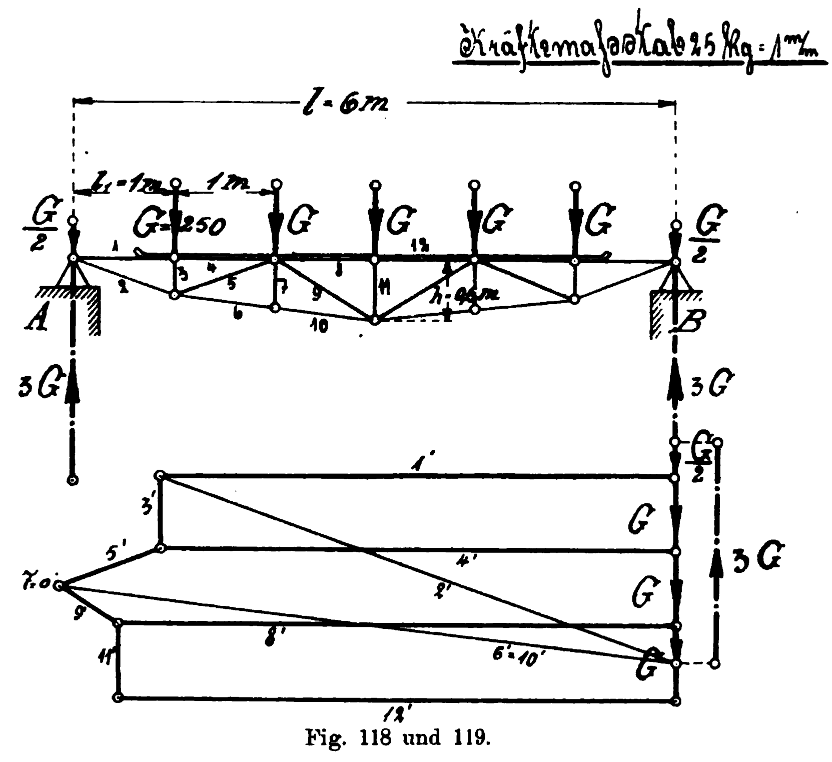


Fig. 118 und 119.

druck von $\frac{Q}{4}$ auf den Träger überträgt, so werden in der Stellung I diese Drücke direkt an die Knoten a und b abgegeben, während alle übrigen Knotenpunkte unbelastet bleiben. Diese unsymmetrische Belastung bedingt dann nach Feststellung der Stützreaktionen R_1 und R_2 mittelst des Kräfte- und Seilpolygones die Aufzeichnung des Spannungsschemas für den ganzen Träger. Siehe Fig. 121.

Befindet sich die Katze in der Lage II, also in der Mittelstellung, so ist die Lastverteilung wieder eine symmetrische. Der Knotenpunkt c hat einen Druck $\frac{Q}{4}$, b und d dagegen nur je $\frac{Q}{8}$ aufzunehmen, und die gleichen Reaktionen R_1 und R_2 haben die Gröfse $\frac{Q}{4}$. Hier braucht also der Kräfteplan wieder nur zur Hälfte aufgezeichnet zu werden. Siehe Fig. 122. Nach-

dem nun der zeichnerische Teil der Aufgabe erledigt ist, fertigt man für die den Kräfteplänen entnommenen Spannungen die Tabelle (s. S. 92) an, in welche auch die aus Nutzlast und Eigengewicht resultierenden Spannungen aufgenommen sind. Letztere werden nur bis zur Trägermitte, inklusive Stab 11, durch algebraische Addition der Einzelspannungen er-

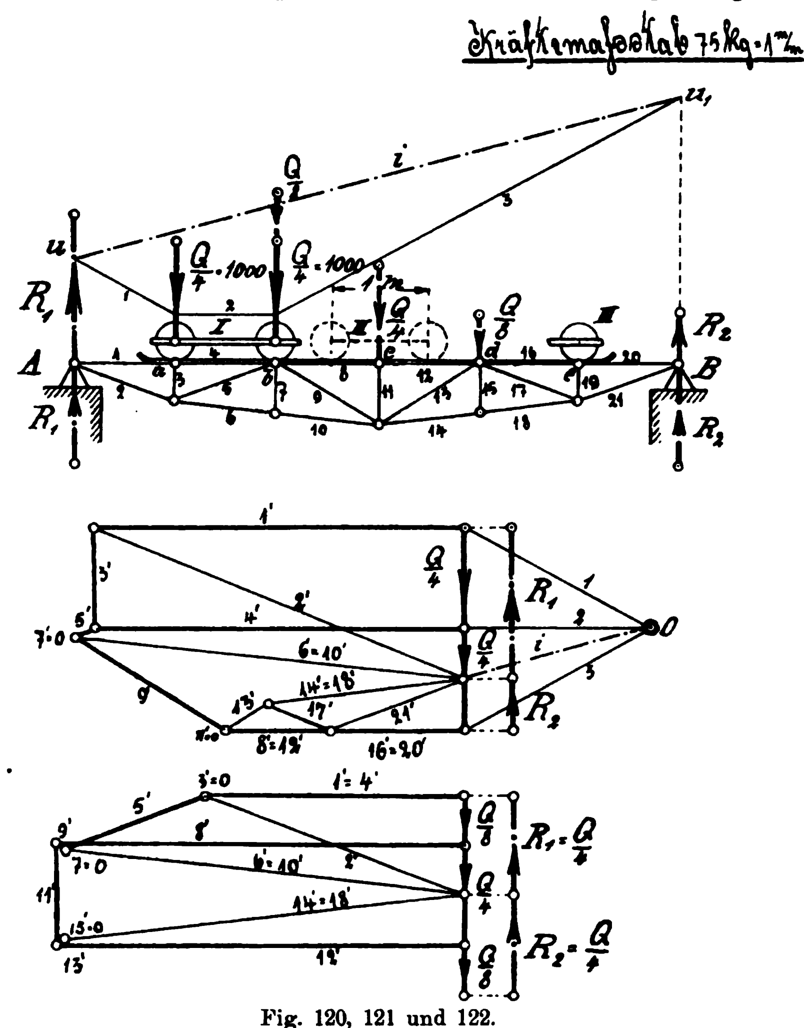


Fig. 120, 121 und 122.

halten, treten aber in den gleichliegenden Stäben 12 bis 21 der anderen Trägerseite in gleicher Gröfse auf, wenn man sich die Katze in die Lage *III* verschoben denkt.

Aufgabe 3.

Die in den Bindern eines auf Säulen gestützten Perrondaches (Fig. 123) von $l = 6{,}75$ m Ausladung und $h = 2{,}25$ m Höhe herrschenden Spannungen sind zu ermitteln. Die konstante Binderentfernung voneinander betrage $a = 3$ m.

Spannungstabelle.

Stab Nr.	Eigengewicht		Nutzlast Stellung *I*		Nutzlast Stellung *II*		Resultierende Spannung	
	Zug in kg	Druck in kg	Zug in kg	Druck in kg	Zug in kg	Druck in kg	Zug in kg	Druck in kg
1	—	1700	—	3670	—	2550	—	5370
2	1820	—	3960	—	2750	—	5780	—
3	—	240	—	950	—	—	—	1190
4	—	1700	—	3670	—	2550	—	5370
5	—	360	—	225	—	1500	—	1860
6	2050	—	3900	—	4000	—	6050	—
7	—	—	—	—	—	—	—	—
8	—	1850	—	2350	—	4050	—	5900
9	—	220	—	1800	140	—	—	2020
10	2050	—	3900	—	4000	—	6050	—
11	—	250	—	—	—	1050	—	1300
12	—	1850	—	2350	—	4050	—	5900
13	—	220	450	—	140	—	—	2120
14	2050	—	1950	—	4000	—	6050	—
15	—	—	—	—	—	—	—	—
16	—	1700	—	1350	—	2550	—	5370
17	—	360	—	710	—	1500	—	1860
18	2050	—	1950	—	4000	—	6050	—
19	—	240	—	—	—	—	—	1190
20	—	1700	—	1350	—	2550	—	5370
21	1820	—	1420	—	2750	—	5780	—

Lösung. Bezieht man für die Bestimmung der Knotenpunktsbelastungen des Obergurtes die Binderbelastungen zunächst auf 1 m² der Grundfläche des Daches, so kann das Bindereigengewicht mit $g_1 = 20$ kg angenommen werden. Das Eigengewicht der Schiefereindeckung einschliefslich des Bretterbelags und der Pfetten sei $g_2 = 80$ kg und die Belastung durch Schnee $g_3 = 75$ kg. Da weiterhin nur einseitige Windbelastung auftreten kann und aufserdem die Dachkonstruktion ziemlich einfach ist, so genügt es, den Winddruck durch eine Vermehrung des vertikalen Schneedrucks um $25 \div 40$ kg pro m² Grundfläche zu berücksichtigen. Gewählt sei deshalb $g_4 = 35$ kg, so dafs sich die Gesamtbelastung eines jeden Quadratmeters der Grundrifsfläche ergibt zu:

$$g = g_1 + g_2 + g_3 + g_4 = 20 + 80 + 75 + 35 = 210 \text{ kg}.$$

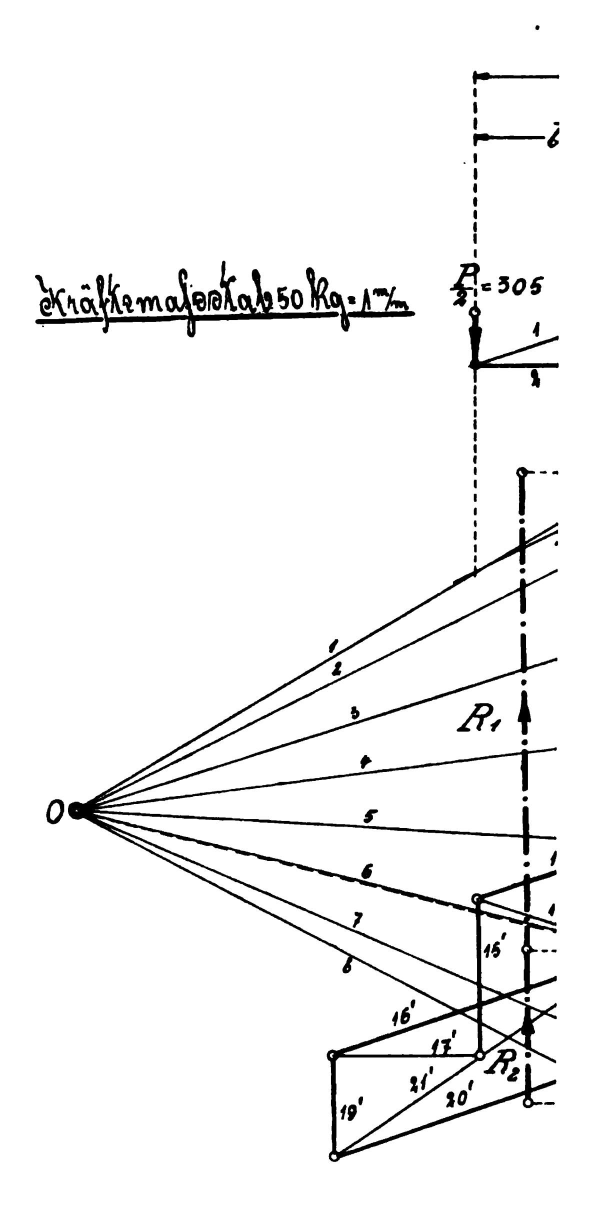
Zu jedem Binder gehört nun eine nutzbare Grundrifsfläche von:

$$F = 6{,}75 \cdot 3 = 20{,}25 \text{ m}^2,$$

weshalb die Gesamtbinderbelastung:

$$G = g \cdot F = 210 \cdot 20{,}25 = \sim 4260 \text{ kg}$$

beträgt.



Kräftemaßstab 50 Kg = 1 m/m
$\frac{P}{2}$ = 305
O
R_1
R_2
1
2
3
4
5
6
7
8
15'
16'
17'
19'
20'
21'

Macb

Infolge der konstanten Feldweiten (1,125 m) erhalten demnach alle zwischen den Binderenden liegenden Knotenpunkte die Vertikalbelastung:

$$P = \frac{G}{6} = \frac{4260}{6} = 710 \text{ kg},$$

während auf die Endknoten je $\frac{P}{2} = 305$ kg entfällt.

Nach Fig. 124 sind jetzt bei Annahme eines beliebigen Poles mittels Kräfte- und Seilpolygones die in A und B auftretenden vertikalen Stützreaktionen R_1 und R_2 zu bestimmen, woran anschliefsend der charakteristische Kräfteplan im gleichen Mafsstab aufzuzeichnen ist. Die Anbringung der Stütze A in der Entfernung $l_1 = 2{,}25$ m vom linken Binderende bedingt hier eine ganz eigenartige Beanspruchung der Fachwerksglieder. So werden z. B. die Obergurtstäbe 1 und 4 gezogen, Stab 8 bleibt überhaupt spannungslos, und 12, 16 und 20 werden auf Druck (Zerknickung) beansprucht. Ähnliches zeigt sich beim Untergurt. In 2, 6 und 10 tritt Druckspannung auf, 14 bleibt spannungslos und 18 und 21 werden gezogen. Das Kräfteschema Fig. 124 sowie die anschliefsende Spannungstabelle zeigen also, dafs die Stäbe 3, 8 und 14 ganz aus dem Fachwerksverbande fehlen könnten, ohne das Gleichgewicht irgendwie zu stören. Die erwähnten Stäbe dienen hier nur als Füllglieder.

Spannungstabelle.

Stab Nr.	Zug in kg	Druck in kg
1	1130	—
2	—	1070
3	—	—
4	2200	—
5	—	1080
6	—	1070
7	—	2820
8	—	—
9	2500	—
10	—	2070
11	—	1400
12	—	1140
13	1140	—
14	—	—
15	—	1050
16	—	2170
17	1000	—
18	1290	—
19	—	700
20	—	2170
21	2470	—

Aufgabe 4.

Ein Dach von $l = 12$ m Spannweite und $h = 3{,}5$ m Firsthöhe ist mit Zinkwellblech eingedeckt und erhält Oberlicht. Welche Spannungen treten in den Profilstäben des in Fig. 125 dargestellten Binders auf, wenn die Binderentfernung zu $a = 2$ m angenommen wird?

Lösung. Die in der Zeichnung eingetragenen Mafse geben den Neigungswinkel des Obergurtes der unteren Binderhälfte an, die mit Zinkwellblech eingedeckt werden soll. Es ist:

$$tg\,\alpha_1 = \frac{h_1}{\frac{l}{2}} = \frac{2{,}5}{6} = 0{,}416,$$

folglich:

$$\alpha_1 = 22^0\,40'.$$

Für den Obergurt des oberen Binderteils, welcher mittels Sprosseneisen den Glasbelag trägt, folgt aus:

$$tg\,\alpha_2 = \frac{h}{\frac{l_1}{2}} = \frac{3{,}5}{4{,}3} = 0{,}816,$$

folglich:

$$\alpha_2 = 39^0\,15'.$$

Die durch Eigengewicht und Schneelast erzeugten Binderbelastungen lassen sich wie folgt auf die Obergurtsknotenpunkte reduzieren.

Die Grundrifsfläche für den Oberlichtaufbau des Binders ist:

$$F_2 = a \cdot l_2 = 2 \cdot 5 = 10 \text{ m}^2.$$

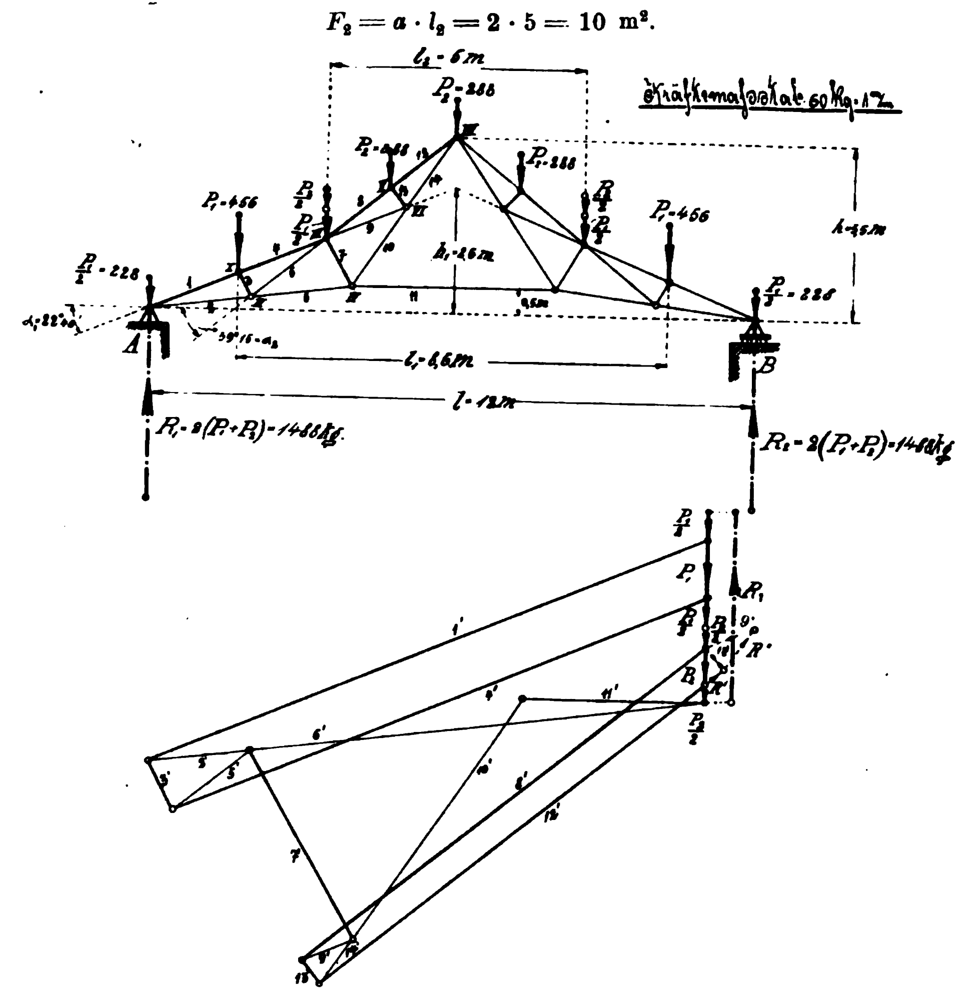


Fig. 125 und 126.

Jedes Quadratmeter hat eine vertikale Belastung aufzunehmen von schätzungsweise:

$g_1 = 25$ kg Bindergewicht, $g_2 = 40$ kg Glas auf Sprosseneisen und $g_3 = \backsim 50$ kg Schnee, so dafs die Gesamtbelastung des Oberlichtbinders:

$$G_2 = (g_1 + g_2 + g_3)\,F_2 = (25 + 40 + 50) \cdot 10 = 1150 \text{ kg}.$$

Demnach ist für den vollbelasteten Knotenpunkt:

$$P_2 = \frac{G_2}{4} = \frac{1150}{4} = \backsim 288 \text{ kg}.$$

Die Grundrifsfläche des unteren Binderteiles beträgt:

$$F_1 = (l - l_2) \cdot a = (12 - 5) \cdot 2 = 14 \text{ m}^2.$$

Hiervon hat jedes Quadratmeter aufzunehmen:

$g_1' = 25$ kg Bindergewicht, $g_2' = 30$ kg Zinkwellblech auf Winkeleisen, und wegen der geringen Dachneigung den vollen Schneedruck $g_3' = 75$ kg.

Folglich ist die Gesamtbelastung:

$$G_1 = (g_1' + g_2' + g_3')\, F_1 = (25 + 30 + 75) \cdot 14 = 1820 \text{ kg},$$

Kräftemaßstab 60 Kg. 1 mm

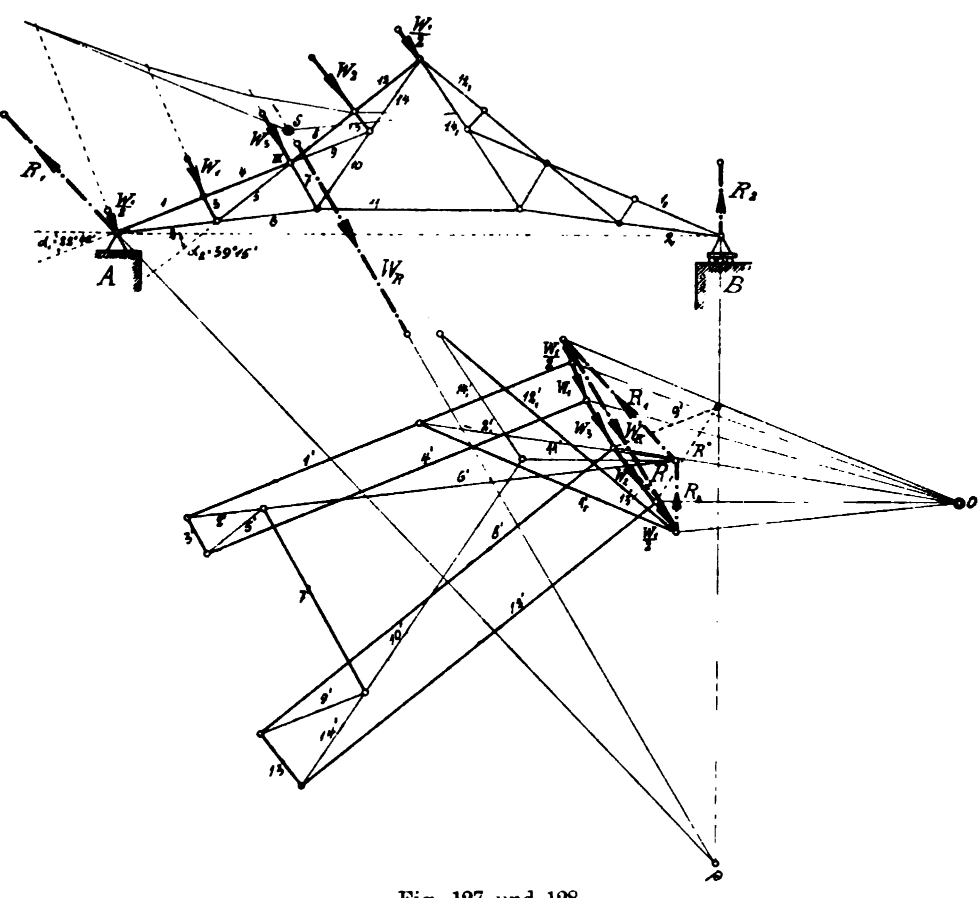


Fig. 127 und 128.

so dafs:

$$P_1 = \frac{G_1}{4} = \frac{1820}{4} = \sim 456 \text{ kg}.$$

Der jetzt aufzuzeichnende Kräfteplan (Fig. 126) bietet für die ersten Knotenpunkte *A*, *I* und *II* keine Schwierigkeit, jedoch schliefst weiterhin die Lösung des Knotens *III* oder *IV* eine vorläufig unbestimmte Aufgabe in sich, da jedesmal drei unbekannte Spannungen vorhanden sind. Man

wird deshalb zunächst zum Knoten *V* übergehen, wo trotz der ebenfalls unbekannten drei Gröfsen 8′, 12′ und 13′ wenigstens die Bestimmung von 13′ möglich ist.

Bedenkt man nämlich, dafs die Richtungslinie der Resultierenden *R′* von 8′ und 12′ mit der ihrer Komponenten zusammenfällt, so läfst sich mit P_2 beginnend im Kräfteplan ein geschlossenes Kräftedreieck P_2 *R′* 13′ verzeichnen, in welchem der Umfahrungssinn des Pfeiles von P_2 die Kraft

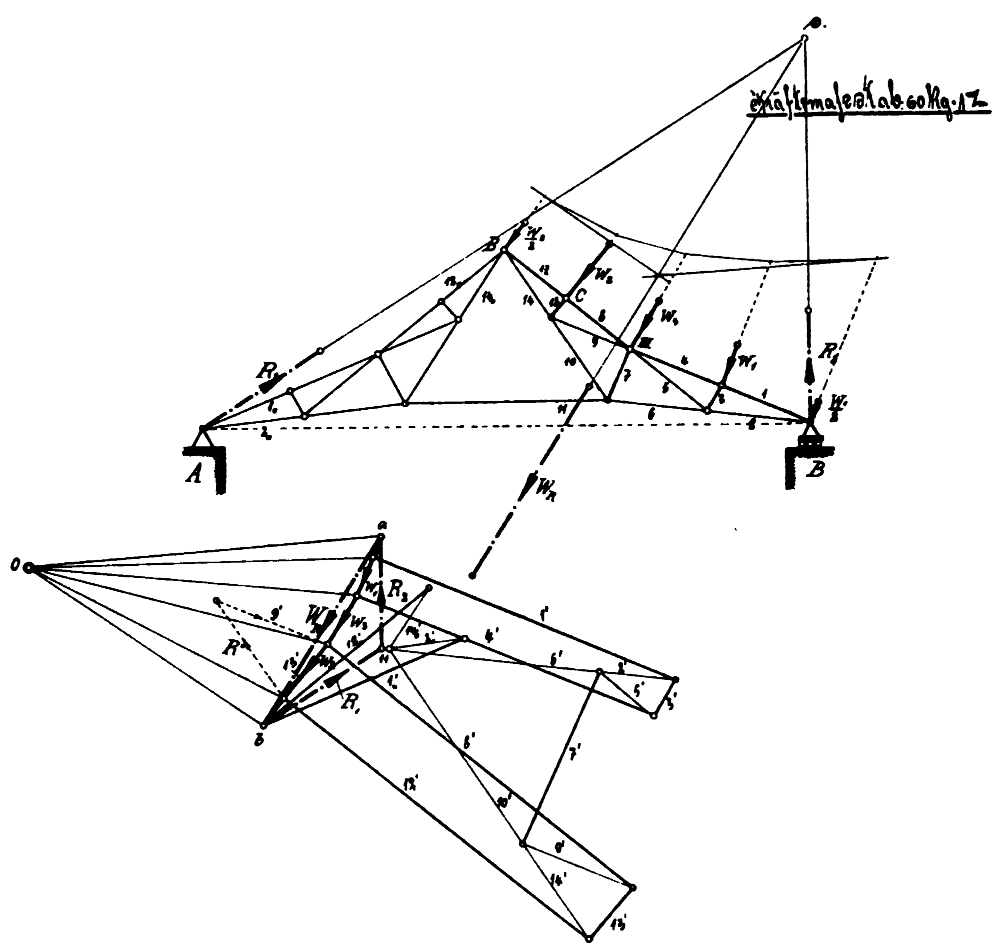


Fig. 129 und 130.

13′ als Druckspannung markiert. Da gleichzeitig auch die Gröfse von 13′ gegeben, so folgt in analoger Weise die Spannungsbestimmung von 9′ am Knoten *VI*, indem man im Kräfteplan aus der Resultierenden *R″* von 10′ und 14′, 13′ und 9′ das Kräftedreieck aufzeichnet, worin der für Knoten *VI* umgekehrte Pfeil von 13′ die Spannung 9′ als Zugspannung angibt. Infolgedessen ist nun Knoten *III* lösbar, und die weitere Aufzeichnung des Kräfteplanes geht glatt vonstatten.

Spannungstabelle.

Stab Nr.	Eigengewicht und Schneelast		Winddruck links		Winddruck rechts		Resultierende Spannung	
	Zug in kg	Druck in kg	Zug in kg	Druck in kg	Zug in kg	Druck in kg	Zug in kg	Druck in kg
1	—	4750	—	1630	—	1300	—	6380
2	4400	—	1950	—	1170	—	6350	—
3	—	440	—	165	—	170	—	610
4	—	4650	—	1620	—	1270	—	6270
5	760	—	280	—	280	—	1040	—
6	3600	—	1640	—	870	—	5240	—
7	—	1700	—	820	—	750	—	2520
8	—	4100	—	1800	—	1550	—	5900
9	440	—	450	—	470	—	910	—
10	2340	—	1120	—	940	—	3460	—
11	1440	—	600	—	30	—	2040	—
12	—	3860	—	1800	—	1550	—	5660
13	—	230	—	260	—	270	—	530
14	2770	—	1560	—	1400	—	4330	—
1′	—	—	—	1100	—	—	—	—
1″	—	—	—	—	—	880	—	—
2′	—	—	1040	—	—	—	—	—
2″	—	—	—	—	340	—	—	—
12′	—	—	—	1220	—	—	—	—
12″	—	—	—	—	—	850	—	—
14′	—	—	590	—	—	—	—	—
14″	—	—	—	—	290	—	—	—

Die Knotenpunktsbelastungen durch den einseitigen Winddruck ergeben sich mittels der Formel:

$$W = 150 \cdot a \cdot \overline{BC} \cdot \sin^2 \varphi.$$

Für den oberen Binderteil ist hierin die konstante Knotenpunktsentfernung $\overline{BC} = 1{,}6$ m (siehe Fig. 129) und

$$\varphi_2 = \alpha_2 + 10^0 = 39^0\,15' + 10^0 = 49^0\,15',$$

so daſs:

$$W_2 = 150 \cdot 2 \cdot 1{,}6 \sin^2 \cdot 49^0\,15' = \sim 276 \text{ kg}.$$

Für den unteren Binderteil ist $\overline{BC} = 1{,}9$ m und

$$\varphi_1 = \alpha_1 + 10^0 = 22^0\,40' + 10 = 32^0\,40',$$

folglich:

$$W_1 = 150 \cdot 2 \cdot 1{,}9 \cdot \sin^2 \cdot 32^0\,40' = \sim 166 \text{ kg}.$$

Im Knotenpunkt *III* (Fig. 127 und 129) lassen sich dann $\frac{W_1}{2}$ und $\frac{W_2}{2}$ zur Resultierenden $W_3 = \sim 280$ kg vereinigen. Die Fig. **127** bis **130** zeigen, wie die Stützreaktionen mittels Kräfte-Seilpolygones gefunden werden.

und lassen auch erkennen, dafs die Lösung des Knotens *III* in derselben Weise vorzunehmen ist wie in Fig. 126. Aus der beigefügten Tabelle sind die allen drei Kräfteplänen entnommenen Einzelspannungen, sowie die für die Festigkeitsrechnung in Frage kommenden resultierenden Stabspannungen zu ersehen.

Sechstes Kapitel.

Die statisch bestimmten Achsen und Wellen.

Die Achsen und Wellen unterscheiden sich hauptsächlich bezüglich ihrer Materialbeanspruchung voneinander. Solange ein auf zwei Stützen gelagerter Träger bei einer drehenden oder schwingenden Bewegung nur auf Zug, Druck (Zerknickung) oder Biegung beansprucht wird, heifst er Achse, im anderen Falle dagegen, wo sich zu den biegenden Kräften auch noch einflufsreiche verdrehende Kräfte gesellen, Welle. Achsen sowohl als auch Wellen werden im Maschinenbau gewöhnlich als Träger gleicher Festigkeit konstruiert, d. h. derart, dafs in allen Querschnitten gleiche gröfste Einheitsspannungen auftreten. Dieses bietet nicht nur den Vorteil einer gröfseren Materialersparnis, sondern erhöht auch die Sicherheit gegen etwaige Stofswirkungen.

Die erwähnten Materialspannungen können nun entweder durch äufsere Biegemomente allein oder durch Kombination derselben mit Verdrehungsmomenten erzeugt werden, wobei noch die Möglichkeit vorhanden ist, dafs die Biegemomente in einer und derselben oder in verschiedenen Ebenen auftreten. In jedem, auch kompliziertererem Falle kann man durch Aufzeichnung der entsprechenden Momentenfläche ein übersichtliches Bild der ganzen Achsen- resp. Wellenbeanspruchung liefern und ist dadurch in den Stand gesetzt, die gesuchten Querschnitte schneller und sicherer zu bestimmen, als man durch reine Rechnung erwarten darf.

§ 16. Die einfachen Tragachsen.

Wird eine horizontal gelagerte Achse durch äufsere Kräfte auf Biegung beansprucht, so sind bezüglich der Art der Kraftwirkung vier Möglichkeiten vorhanden. Der meist vorkommende Fall ist der, dafs mehrere parallele Kräfte senkrecht zur Achse stehen und in einer und derselben Ebene wirken. Weiterhin kann eine einzelne biegende Kraft schief auf der Achse stehen oder parallel zu dieser verlaufen, und endlich können auch mehrere schief gerichtete Kräfte, in verschiedenen Ebenen wirkend, vorhanden sein.

Alle vier Fälle sollen nacheinander untersucht werden.

1. Die biegenden Kräfte wirken in einer Ebene.

Mit Rücksicht auf die spätere Aufzeichnung des theoretischen Achsenprofiles soll hier gleich ein Zahlenbeispiel angezogen werden. Deshalb sei die in Fig. 131 im Längenmafsstab 1 : 75 dargestellte Achse durch zwei Vertikalkräfte $P_1 = 14\,000$ kg und $P_2 = 8000$ kg belastet. Der Kräftemafsstab sei 600 kg = 1 mm. Entwirft man nun in der bekannten Weise das Kräfte- und Seilpolygon und zieht die Schlufslinie ***uu***, deren Parallele ***i***

durch Pol O die Gröfse der Stützdrücke R_1 und R_2 bestimmt, so wird die Momentenfläche der Achse vom Seilpolygon und der Schlufslinie begrenzt, und es gilt nach früherem für den durch das gröfste y kenntlichen, gefährlichen Querschnitt C:

$$M_{max} = y_{max} \cdot H.$$

Ebenso folgt für einen beliebigen Querschnitt X:

$$M_x = y_x \cdot H.$$

Da die Achse als Träger gleicher Festigkeit zu konstruieren ist, so lauten die Biegungsgleichungen für C und X, wenn kreisrunde Querschnitte vorausgesetzt werden:

$$y_{max} \cdot H = 0{,}1\ d_{max}^3 \cdot k$$

und

$$y_x \cdot H = 0{,}1\ d_x^3 \cdot k.$$

Durch Division folgt:

$$\frac{y_{max}}{y_x} = \frac{d_{max}^3}{d_x^3},$$

d. h. die unter zwei betrachteten Achsenquerschnitten liegenden Momentenordinaten verhalten sich wie die Kuben der zu diesen Querschnitten gehörigen Durchmesser.

Mittels dieser Gleichung ergibt sich, nachdem vorher d_{max} ermittelt wurde, ohne weiteres der für Querschnitt X gesuchte Durchmesser zu:

$$d_x = d_{max} \sqrt[3]{\frac{y_x}{y_{max}}}.$$

Ebenso würde für irgendeinen anderen Querschnitt Z folgen:

$$d_z = d_{max} \sqrt[3]{\frac{y_z}{y_{max}}}.$$

Noch schneller bald erhält man den gesuchten Achsendurchmesser nach Fig. 132 durch Konstruktion der vierten Proportionalen, indem man auf den einen Schenkel eines beliebigen Winkels von der Spitze a aus die bekannten $y_x = a\,b$ und $y_{max} = a\,c$ aufträgt, dieselbe Operation in einem passenden Mafsstabe mit d_{max}^3 beim anderen Schenkel vornimmt und die Linie $c\,d$ zieht. Die hierzu durch den Punkt b gezogene Parallele schneidet auf $a\,d$ die Strecke $a\,e = d_x^3$ ab, welche dann, mit dem für d_{max}^3 gewählten Mafsstabe multipliziert, das wirkliche d_x^3 ergibt.

Die Gleichung:

$$\frac{y_{max}}{y_x} = \frac{d_{max}^3}{d_x^3}$$

ist die der kubischen Parabel, d. h. hier: die Endpunkte aller Achsendurchmesser werden von dieser Kurve umschlossen.

Das so erhaltene theoretische Achsenprofil ist ein kubisches Paraboloid, welchem aus Gründen der Bearbeitung das praktische Profil derart zu umschreiben ist, das die Achsenschenkel aus Kegelstumpfen bestehen.

Nach den in Fig. 131 eingeschriebenen Mafsen folgt aus:

$$y_{max} \cdot H = 0{,}1 \cdot d_{max}^3 \cdot k,$$

$$d_{max}^3 = \frac{y_{max} \cdot H}{0{,}1 \cdot k},$$

oder wenn für Schmiedeisen $k = 5$ kg mm² gewählt wird:

$$d_{max}^3 = \frac{\overbrace{22,66 \cdot 600}^{y_{max}} \cdot \overbrace{13,33 \cdot 75}^{H}}{0,1 \cdot 5} = 27\,200\,000 \text{ mm}^3$$

und

$$d_{max} = \sim 300,5 \text{ mm } \Phi.$$

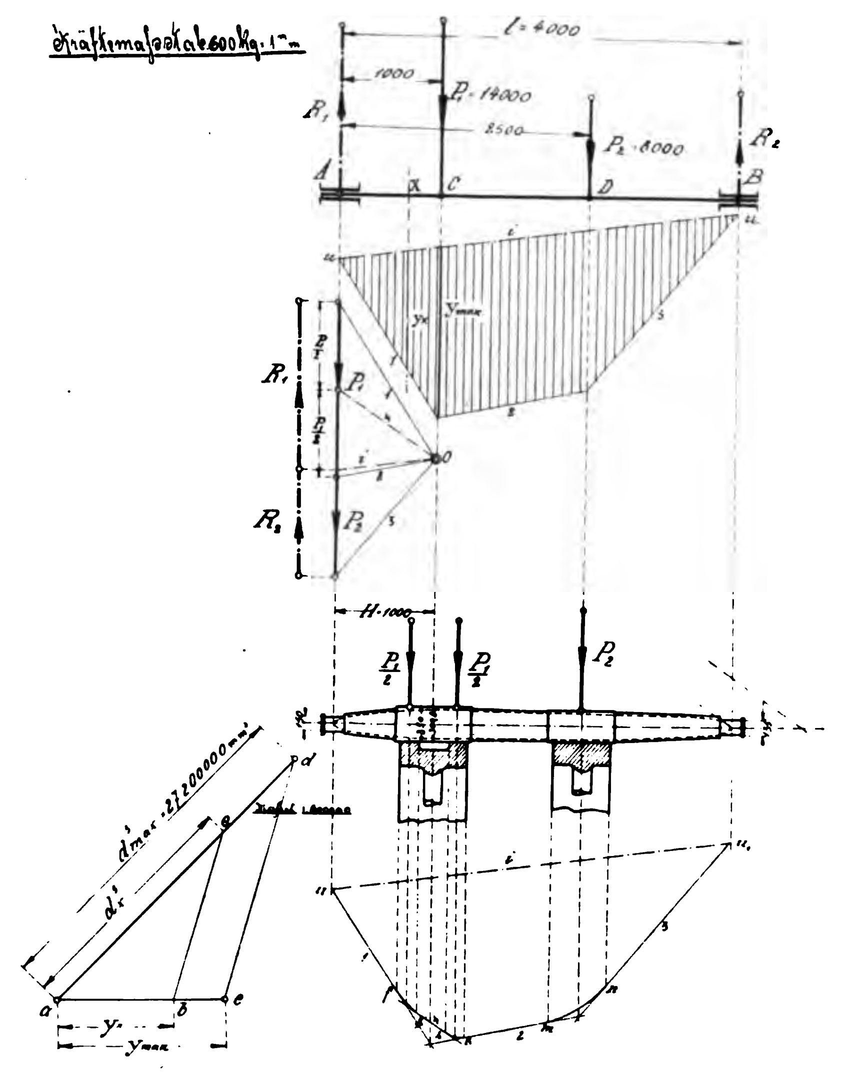


Fig. 131, 132, 133 und 135.

Trägt man in Fig. 132 d_{max}^3 im Maſsstabe 1:600 000 auf und zieht cd, so ergibt sich in der Zeichnung für den Querschnitt X mittels $be \parallel cd$:

$$d_x^3 = ac = 31,66,$$

wogegen in Wirklichkeit:

$$d_x^3 = 31{,}66 \cdot 600\,000 = 19\,000\,000 \text{ mm}^3,$$

folglich:

$$d_x = 267 \text{ mm } \Phi.$$

In analoger Weise wird man jetzt für möglichst viele Querschnitte die Durchmesser feststellen, bis man imstande ist, die Umhüllende derselben, die kubische Parabel, wie in Fig. 133, genau aufzeichnen zu können. Hierbei empfiehlt es sich namentlich, die Scheitelstücke der Parabel recht sorgfältig auszuführen, damit auch eine genaue graphische Bestimmung der Zahlenabmessungen möglich ist.

Bedeutet l die Zapfenlänge, d den Durchmesser und R den Zapfendruck, so ist mit Rücksicht auf Festigkeit:

$$R \cdot \frac{l}{2} = 0{,}1\, d^3 \cdot k$$

und mit Rücksicht auf Flächenpressung:

$$R = l \cdot d \cdot p$$

worin p der Druck pro Flächeneinheit.

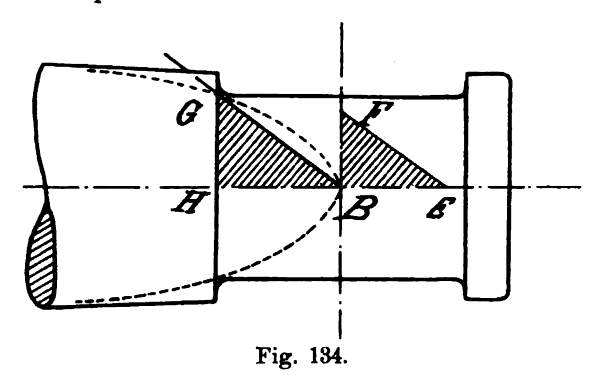


Fig. 134.

Durch Vereinigung beider Formeln erhält man nun Aufschlufs über das Verhältnis $\frac{l}{d}$, denn durch Division folgt:

$$\frac{l}{2} = \frac{0{,}1\, d^3 \cdot k}{l \cdot d \cdot p},$$

woraus:

$$\frac{l}{d} = \sqrt{0{,}2 \cdot \frac{k}{p}}.$$

Hierin wird für normale Verhältnisse $k = 3$ kg pro mm² und $p = 0{,}3$ kg pro mm² angenommen, so dafs:

$$\frac{l}{d} = \sqrt{0{,}2 \cdot \frac{3}{0{,}3}} = \backsim 1{,}4.$$

Mittels dieses Verhältnisses konstruiert man den Zapfen, wie folgt:

Man trage nach Fig. 134 auf der vertikalen Mittellinie des Zapfens die Strecke $BF = 1$ cm und auf der horizontalen $BE = \frac{l}{d} = 1{,}4$ cm auf und ziehe EF. Legt man nun durch B eine Parallele zu EF, die die

kubische Parabel in G schneidet, so erhält man in der Vertikalen durch G die Zapfenwurzel und den Radius $HG = \frac{d}{2}$, denn aus den ähnlichen Dreiecken BEF und BGH folgt:

$$\frac{B \cdot H}{G \cdot H} = \frac{E \cdot B}{F \cdot B} = \frac{1{,}4}{1},$$

also:

$$\frac{\frac{l}{2}}{\frac{d}{2}} = \frac{l}{d} = 1{,}4.$$

Wendet man diese Konstruktion in Fig. 133 für die Zapfen A und B an, so läſst sich jetzt das praktische Profil dem theoretischen umschreiben, wenn die Befestigungsart der Konstruktionsteile, deren Gewichte P_1 und P_2 darstellen, gegeben ist. Handelt es sich um zwei Räder von bestimmter Nabenlänge, so wird man natürlich mit Rücksicht auf bequeme Montage und Bearbeitung der Keilnuten die Durchmesser der zylindrischen, Naben tragenden Wellenteile entsprechend vergröſsern (350 mm statt 300,5 mm in Fig. 133) und kann dann die endgültige Form der Welle festlegen.

Für praktische Rechnungen gewährt die Auffassung von P_1 und P_2 als Einzelkräfte immer eine erhöhte Sicherheit. Bei genaueren Untersuchungen würden nämlich alle theoretischen Durchmesser zwischen den Nabenrändern etwas kleiner werden können, wenn man die Momentenfläche in Fig. 131 nach Fig. 135 korrigiert. Ist nämlich P_1 das Gewicht eines in der Nabe ausgesparten Rades, so setzt sich diese Einzellast in Wirklichkeit nach Fig. 133 aus den beiden stetigen Lasten $\frac{P_1}{2}$ und $\frac{P_1}{2}$ zusammen. Durch die Teilung von P_1 kommt zunächst im Kräftepolygon Fig. 131 der Strahl 4 hinzu, dessen parallele Seite 4 im Seilpolygon Fig. 135 durch Hinunterloten der Kraftrichtungen von $\frac{P_1}{2}$ bis zum Schnitt mit den Seiten 1 und 2 erhalten wird. Lotet man ferner die Nabenränder in das Seilpolygon hinein bis zum Schnitt f, g, h und k und konstruiert innerhalb f—g und h—k die Parabel, so ist der Einfluſs der stetigen Lasten in der Momentenfläche genau gekennzeichnet.

Bedeutet P_2 das Gewicht eines Rades mit nicht ausgesparter Nabe, so ist P_2 als gleichmäſsig verteilte Last von m bis n aufzufassen, weshalb innerhalb m—n die Parabel zu konstruieren ist.

In ebenso einfacher, genau gleichbleibender Weise gestaltet sich die graphische Berechnung der Achsen, wenn bei Verwendung von Guſseisen statt der kreisförmigen Querschnitte kreisringförmige zur Ausführung gelangen sollen. Ist dann d der äuſsere, d_1 der innere Durchmesser und $\alpha = \frac{d_1}{d}$ das Höhlungsverhältnis, so wäre für den gefährlichen Querschnitt:

$$y_{max} \cdot H = 0{,}1 \cdot \frac{d_{max}^4 - d_{1\,max}^4}{d_{max}} \cdot k,$$

oder:

$$y_{max} \cdot H = 0{,}1 \cdot \frac{d_{max}^4 - \alpha^4\, d_{max}^4}{d_{max}} \cdot k;$$

folglich:

$$1. \quad y_{max} \cdot H = 0{,}1\, d_{max}^3 (1 - \alpha^4) \cdot k.$$

Ebenso folgt für irgendeinen anderen Querschnitt X:

$$2. \quad y_x \cdot H = 0{,}1\, d_x^3 (1 - \alpha^4) \cdot k,$$

so dafs wieder durch Division:

$$\frac{y_{max}}{y_x} = \frac{d_{max}^3}{d_x^3}.$$

Ist demnach für ein gegebenes Höhlungsverhältnis α mittels der Gleichung 1 das d_{max} ausgerechnet, so ergeben sich alle übrigen Durchmesser wie früher mit Hilfe von Fig. 132.

2. Eine biegende Kraft steht schief auf der Achse.

Bei der in Fig. 136 kenntlichen Wirkungsweise einer um α geneigten Kraft P gegen ein Rad, welches mit der Achse fest verkeilt ist, läfst sich der Angriffspunkt von P nach dem Punkt C der Achse übertragen. Durch Zerlegung von P in eine Vertikalkomponente $P \sin \alpha$ und eine Horizontalkomponente $P \cos \alpha$ ersieht man, dafs $P \cos \alpha$ keine biegende Wirkung ausübt, dagegen das Bestreben zeigt, die Achse über das Lager A hinaus zu verschieben.

Um dies zu verhindern, ist eine Achsialkraft $R_H = P \cos \alpha$ anzubringen, was praktisch meist durch Anordnung eines Bundes berücksichtigt wird, dessen Druckfläche:

$$F = d_1^2 \cdot \frac{\pi}{4} - d_2^2 \cdot \frac{\pi}{4}$$

einen Mindestdruck

$$R_H = P \cos \alpha = \left(d_1^2 \cdot \frac{\pi}{4} - d_2^2 \cdot \frac{\pi}{4}\right) \cdot p$$

auszuhalten hat.

Hierbei ist die vom Vertikalstützdruck herrührende, geringe Reibung ganz aufser acht gelassen.

In ähnlicher Weise wie beim Lager A ist auch bei D ein Bund vorzusehen, wenn auch in vielen Fällen die von $P \sin \alpha + G$ zwischen Achse und Nabe erzeugte Reibung, unterstützt durch die vom Keil herrührende, genügt, um das Rad gegen axiale Verschiebung zu sichern.

Es wäre nun falsch, bei Berechnung der Achse auf Biegung hierzu die Kraft $P \cdot \sin \alpha$ direkt zu benutzen; diese ist vielmehr, wie die Wirkung von P am Rade klar erkennen läfst, als Resultierende zweier anderer Kräfte P_1 und P_2 aufzufassen, die die Randdrücke der Radnabe darstellen. Zur Bestimmung dieser Kräfte ist die Lösung der bereits im ersten Kapitel behandelten Aufgabe anzuwenden, nämlich die durch zwei bekannte Punkte D und E gehenden Parallelkomponenten einer gegebenen Kraft zu suchen. Man zeichne also für $P \cdot \sin \alpha$ ein Kräftepolygon mit den Strahlen 1 und 2, ziehe durch I auf der Kraftrichtung von $P \sin \alpha$ die entsprechenden Seilpolygonseiten bis zum Schnitt u und u_1 mit den Kraftrichtungen von P_1 und P_2 und lege durch den Pol O eine Parallele i zu $u\, u_1$, welche dann die Gröfsen von $P_1 = a\,c$ und $P_2 = b\,c$ auf der Verlängerung von $P \sin \alpha$ direkt abschneidet. Ersetzt man nun $P \sin \alpha$ durch P_1 und P_2, so kann unter Benutzung desselben Kräftepolygones die Momentenfläche $u'\,I'\,II'\,u_1'$ der Achse entworfen worden, wobei man gleichzeitig auch die in A und B auftretenden Vertikalreaktionen Rv_1 und Rv_2 erhält.

Die Berücksichtigung des Radgewichtes beeinflußt die Ermittlung von P_1 und P_2 in keiner Weise. Es ändert sich aber mit den Stützreaktionen R_{r1} und R_{r2} die Momentenfläche, weil ja jetzt drei biegende Kräfte auf die

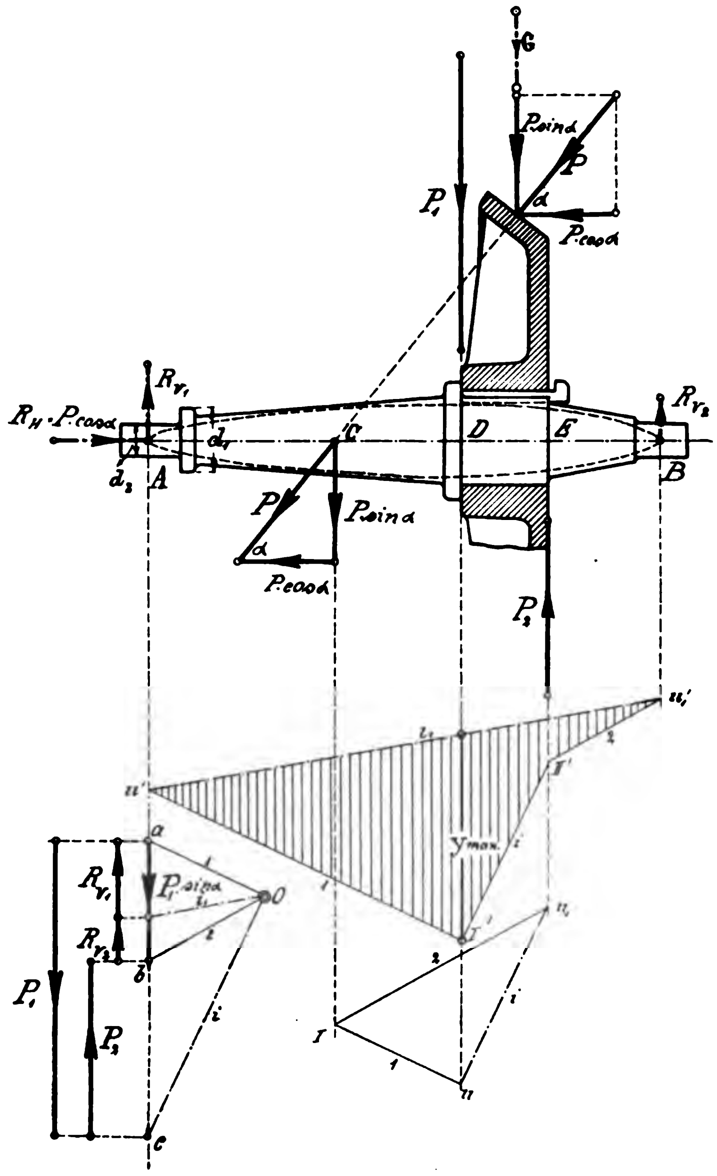


Fig. 136.

Achse einwirken. Sind mehrere schiefe Kräfte ungleicher Neigung vorhanden, die in einer Ebene liegen, so ist ebenfalls auf die Konstruktion in Fig. 136 zu verweisen. Man wird für jede einzelne schiefe Kraft in

der besprochenen Art die Randdrücke bestimmen und mit der Summe dieser Drücke den Entwurf der Momentenfläche vornehmen.

Die praktische Form der Achse wird wieder erst dann festgelegt, nachdem das theoretische Profil unter Zuhilfenahme der Konstruktion in Fig. 132 aufgezeichnet worden ist. Niemals darf die kubische Parabel unterschnitten werden.

3. Eine Kraft wirkt parallel zur Achse.

Denkt man sich in Fig. 136 den Neigungswinkel α der schiefen Kraft P gegen die Horizontale immer kleiner werdend, so wird auch die Vertikalkomponente $P \cdot \sin \cdot \alpha$, also die Resultierende der Randdrücke P_1 und P_2 stets kleiner, während sich der Angriffspunkt von $P \cdot \sin \alpha$ immer weiter nach links verschiebt. Mit $\alpha = o$ rückt der Angriffspunkt von $P \cdot \sin \alpha$ ins Unendliche, und es wird auch $P \cdot \sin \alpha$ gleich Null. Infolge hiervon werden die Randdrücke P_1 und P_2 einander gleich, und es entsteht nach Fig. 137 ein Kräftepaar P_1 und $-P_1$, dessen Bestreben ist, die Achse in der durch P, P_1 und $-P_1$ gelegten Ebene durchzubiegen. Für $\alpha = o$ nimmt die Horizontalkomponente $P \cdot \cos \alpha$ den Maximalwert P an, und man ersieht in Fig. 137 durch Anbringung zweier gleich grofsen, aber entgegengesetzt gerichteten Axialkräfte P und $-P$, dafs ein Kräftepaar P und $-P$ am Hebelarm m entsteht, welches dem aus den Randdrücken P_1 und $-P_1$ gebildeten gleichwertig sein mufs. Der Gleichgewichtszustand der Achse erfordert deshalb, dafs auch gleich grofse Vertikalreaktionen R_r entstehen, die, verschieden gerichtet, ebenfalls ein Kräftepaar bilden, dessen Wirkung die von P und $-P$ resp. P_1 und $-P_1$ herrührende aufhebt. Die Achse wird nun durch die Axialkraft P nach links zu verschieben gesucht, was wieder die Anbringung eines Bundes bei A und D bedingt, und durch die im Gleichgewicht stehenden Kräfte $-R_r$, P_1, $-P_1$ und R_r auf Biegung beansprucht. Die entsprechende Momentenfläche erhält man wohl am einfachsten in folgender Weise:

Man bestimmt zunächst mittelst Fig. 138 die Gröfse der Randdrücke P_1, indem man in der Entfernung n von F die gegebene Horizontalkraft P aufträgt und die Linie GF über F hinaus so weit verlängert, bis diese die im Abstande m aufgetragene Vertikale schneidet. Das abgeschnittene Stück HJ mufs dann P_1 sein, denn aus den ähnlichen Scheiteldreiecken folgt:

$$\frac{P}{P_1} = \frac{n}{m} \text{ oder } P_1 n = P \cdot m,$$

In ähnlicher Weise ist in Fig. 138 auch noch R_r ermittelt worden. Konstruiert man nun nach Fig. 137 mittels P_1 und $-P_1$ das Kräfte- und Seilpolygon und zieht die Schlufslinie $u v_1$, so ist die Momentenfläche gegeben. Die Parallele i durch O zu $u u_1$ schneidet dann auf P_1 die verschieden gerichteten, aber gleich grofsen Stützreaktionen R_r ab. Die Momentenfläche ergibt Maximalmomente für D und E und Nullmomente für A, B und X. Im Querschnitt X könnte also theoretisch der Achsendurchmesser gleich Null werden, denn hier stofsen die Scheitel des aus zwei kubischen Parabeln bestehenden theoretischen Längsprofiles zusammen; jedoch bedingt die Konstruktion, dafs gerade zwischen D und E die gröfste Materialanhäufung auftreten mufs, weshalb nur die beiden Achsenschenkel der kubischen Parabel möglichst angepafst werden können.

Bemerkt sei noch, dafs die in Fig. 136 und 137 gegebene Angriffsweise einer Kraft auf eine Achse in der Praxis keineswegs selten vor-

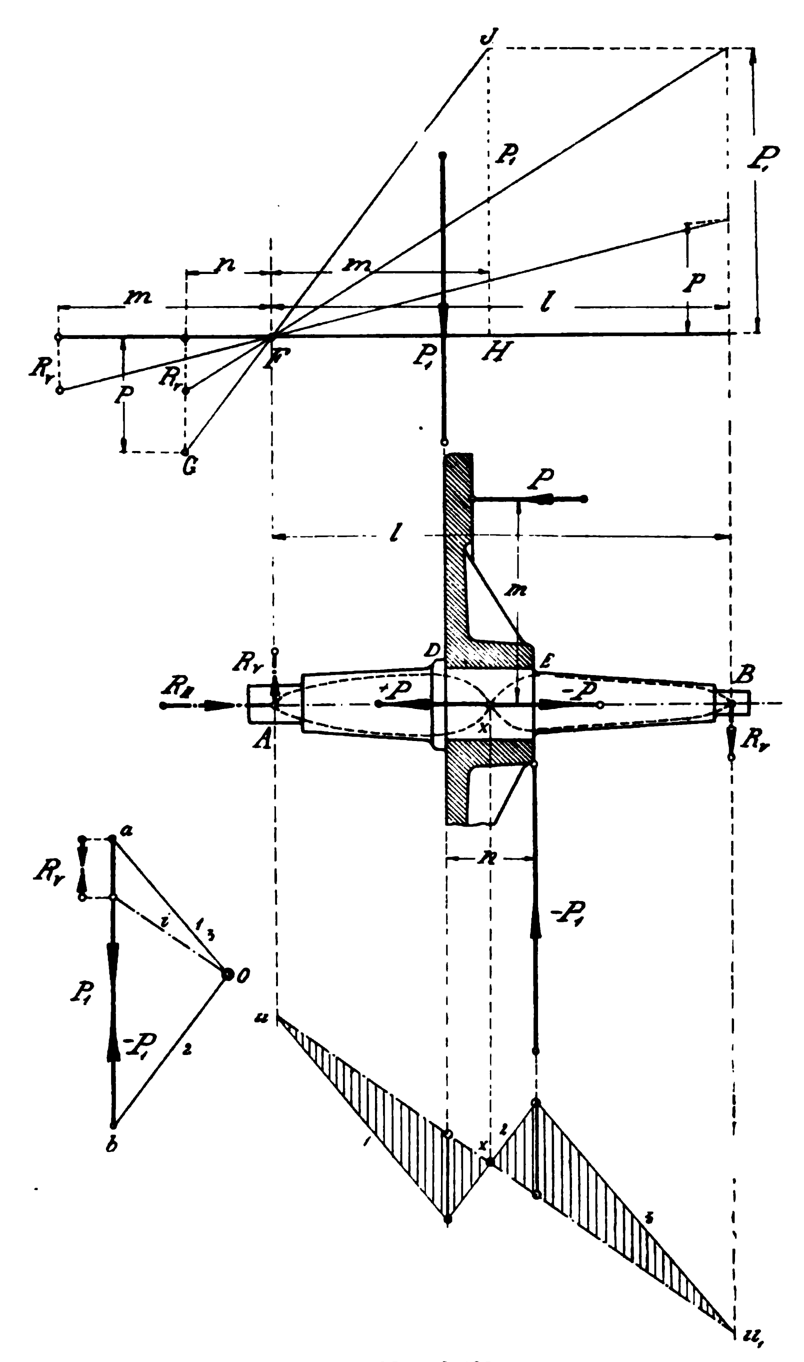
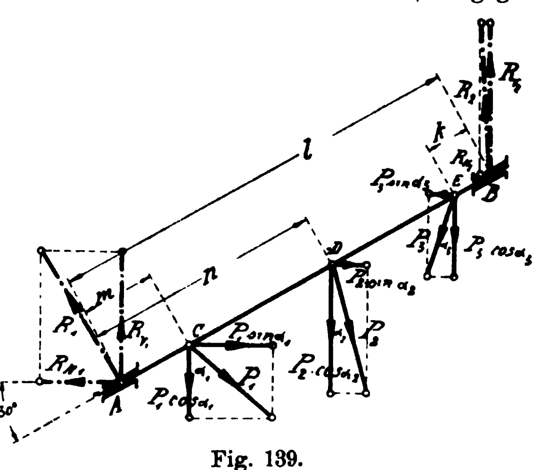


Fig. 137 und 138.

kommt. Man findet sie bei vielen Reibräderkonstruktionen, exzentrischen Schieberstangenführungen, einseitig beaufschlagten Schiffsschrauben usw. Allerdings treten die biegenden Kräfte dann meist mit verdrehenden zusammen auf, deren Berücksichtigung im nächsten Paragraphen gezeigt wird.

4. Mehrere schiefe Kräfte in verschiedenen Ebenen.

Eine Achse sei durch mehrere, z. B. drei Kräfte P_1, P_2 und P_3 belastet, deren Richtungslinien wohl senkrecht zur Achse stehen, jedoch in verschiedenen Ebenen liegen und sich im Raume kreuzen. Man erhält dann ein klares Bild der Kräftewirkung, wenn man sich die Achse mit den vorhandenen Kräften nach Fig. 139 aus der ursprünglich horizontalen Lage herausgenommen und um einen beliebigen Winkel (am einfachsten 30°) geneigt denkt. Da nun die Neigungswinkel α_1, α_2 und α_3 der gegebenen Kräfte gegen die Vertikale verschieden sind, weshalb die Achse in verschiedenen Ebenen auf Biegung beansprucht wird, so würde die analytische Berechnung schon ziemlich umständlich und zeitraubend werden, wogegen bei der graphischen Behandlung dieses Falles der Mehraufwand an Arbeit gegenüber der Untersuchung einfacherer Belastungsfälle nur unbedeutend ist. Man zerlege zunächst, wie in Fig. 139 oder 140, jede der gegebenen Kräfte in eine Vertikal- und eine Horizontalkomponente, so dafs jetzt an der Achse die vertikalen Kräfte $P_1 \cos \alpha_1$, $P_2 \cos \alpha_2$ und $P_3 \cos \alpha_3$ und die horizontalen Kräfte $P_1 \sin \alpha_1$, $P_2 \sin \alpha_2$ und $P_3 \sin \alpha_3$ angreifen und zeichne nach Fig. 140 in bekannter Weise bei gleicher Poldistanz H die von den horizontalen und vertikalen Kräften herrührenden Momentenflächen, wobei gleichzeitig die in den Lagern A und B auftretenden Vertikal- und Horizontalreaktionen gefunden werden. Verschiebt man nun nach Fig. 142 die Pole derart, dafs die Schlufslinien der einzelnen Momentenflächen horizontal liegen, so lassen sich über der Horizontalen $A_1 B_1$ als Basis die Horizontal- und Vertikalbiegemomentenfläche zu einer einzigen A_1 I II III B_1 III' II' I' A_1 aneinanderlegen, wobei in Wirklichkeit die obere A_1 I' II' III' B_1 gegen die untere A_1 I II III B_1 um 90° geneigt ist. In irgendeinem Querschnitt der Achse, z. B. D, ist nämlich das vertikale Biegemoment $y_r \cdot H$ und das horizontale $y_H \cdot H$ vorhanden. Denkt man sich hierin y_r und y_H als Kräfte an den gleichen Hebelarmen H, so entspricht die Beanspruchung im Querschnitt D genau derjenigen eines Freiträgers von der Länge H gleich der Poldistanz, an dessen freiem Ende die um 90° gegeneinander geneigten Kräfte y_r und y_H wirken. Mit der Konstruktion der Resultierenden y als Hypothenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten y_r und y_H ist deshalb auch das resultierende Biegungsmoment $y \cdot H$ in D gegeben (siehe Fig. 141). Das für den Querschnitt D Gesagte gilt analog für alle


Fig. 139.

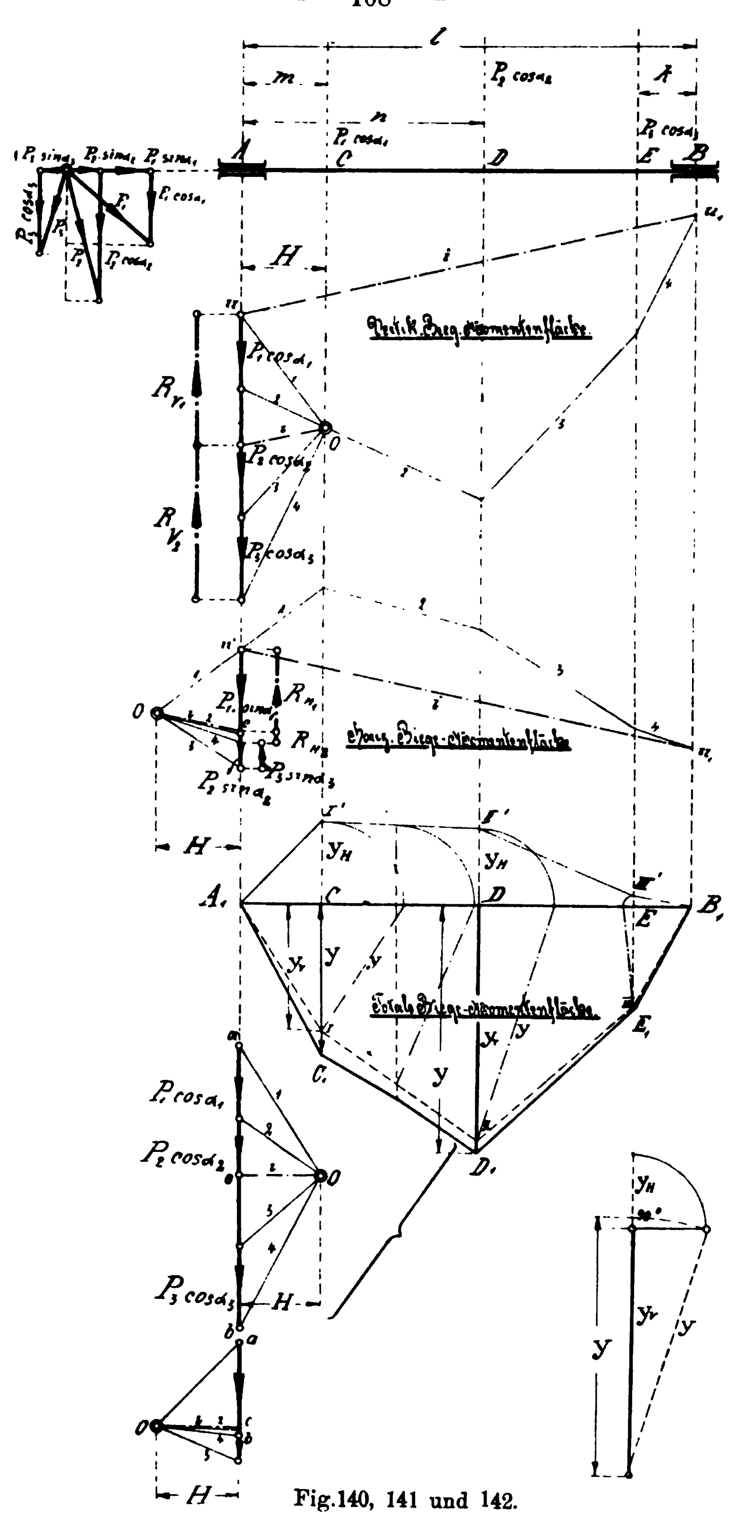


Fig.140, 141 und 142.

übrigen Querschnitte. Führt man deshalb die in Fig. 141 angedeutete Konstruktion möglichst oft aus und trägt die erhaltene Resultierende y, wie in Fig. 142, als Ordinate von $A_1 B_1$ aus nach unten (oder nach oben) auf, so entsteht durch Verbindung der Ordinatenendpunkte die resultierende oder totale Momentenfläche, welche, wie früher gezeigt, zur Querschnittsberechnung der Achse benutzt wird.

Bei Aufzeichnung der genannten Fläche ergibt sich, dafs die Ordinatenendpunkte von C bis A_1 und von E bis B_1 geradlinig, zwischen C und E aber krummlinig begrenzt werden. $A_1 C_1$ resp. $B_1 E_1$ können demnach direkt gezogen werden, wenn $C C_1$ und $E E_1$ konstruiert sind; dagegen läfst sich die Kurve $C_1 D_1 E_1$ erst nach Ermittlung einer genügenden Anzahl y feststellen.

Nach einiger Übung wird man noch die in Fig. 142 vorgenommene Aneinanderlegung der beiden Einzelmomentenflächen fortlassen und direkt von $A_1 B_1$ aus als Basis die in Fig. 141 angedeutete Konstruktion der resultierenden y vornehmen, indem man die benötigten y_r und y_H aus den zugehörigen Momentenflächen (Fig. 140) abgreift.

§ 17. Die Kraftwellen.

Eine in A und B gelagerte Welle möge bei D und C zwei festgekeilte Scheiben tragen, an deren Umfängen derartige konstante Vertikalkräfte P und P_1 wirken, dafs während des Ruhezustandes resp. während der gleichförmigen Drehbewegung der Welle Gleichgewicht herrscht. Dieses ist offenbar der Fall, wenn auf die Wellenachse bezogen:

$$Pr = P_1 r_1. \text{ ist.}$$

Aufser von den Scheibengewichten G und G_1 wird dann die Welle noch durch die Kräfte P und P_1 auf Biegung beansprucht, was direkt einzusehen ist, sobald man sich nach Fig. 143 (Stirnansicht) in der vertikalen Wellenebene die gleich grofsen, entgegengesetzt gerichteten Kräfte P und $-P$ resp. P_1 und $-P_1$ angebracht denkt. Es bleiben dann, abgesehen von den in ihrer Drehwirkung gleich grofsen Kräftepaaren von ungleichem Drehsinn, die vertikal abwärts gerichteten Kräfte P und P_1 als biegende Kräfte übrig. Die Welle wird demnach durch die in einer Ebene wirkenden Kräfte P, G, P_1 und G_1 von A bis B auf Biegung, von D bis C dagegen durch $P \cdot r$ resp. $P_1 r_1$ auch noch auf Verdrehung beansprucht.

Die Berechnung eines Querschnitts auf Biegung und Verdrehung geschieht nun bekanntlich in der Weise, dafs man sich die Wirkung von Biege- und Drehmoment zusammen durch die eines einzigen, sogenannten ideellen, Biegemomentes ersetzt denkt, dessen Gröfse gegeben ist durch:

$$M_i = \frac{3}{8} M_b + \frac{5}{8} \sqrt{M_b^2 + M_t^2}.$$

Demnach ist die Aufgabe zu lösen, für das zwischen C und D liegende Wellenende eine ideelle Biegemomentenfläche zu konstruieren, deren Ordinaten y_i, mit der Poldistanz H multipliziert, direkt die Wirkung von wirklich vorhandenem Biege- und Drehmoment zusammen angeben.

Dies kann in folgender Weise geschehen:

Man entwirft zunächst die durch P, G, P_1 und G_1 erzeugte Biegemomentenfläche nach Fig. 143, stellt gleichzeitig hiermit die für die spätere Berechnung der Lagerabmessungen nötigen Stützreaktionen R_1 und R_2 fest

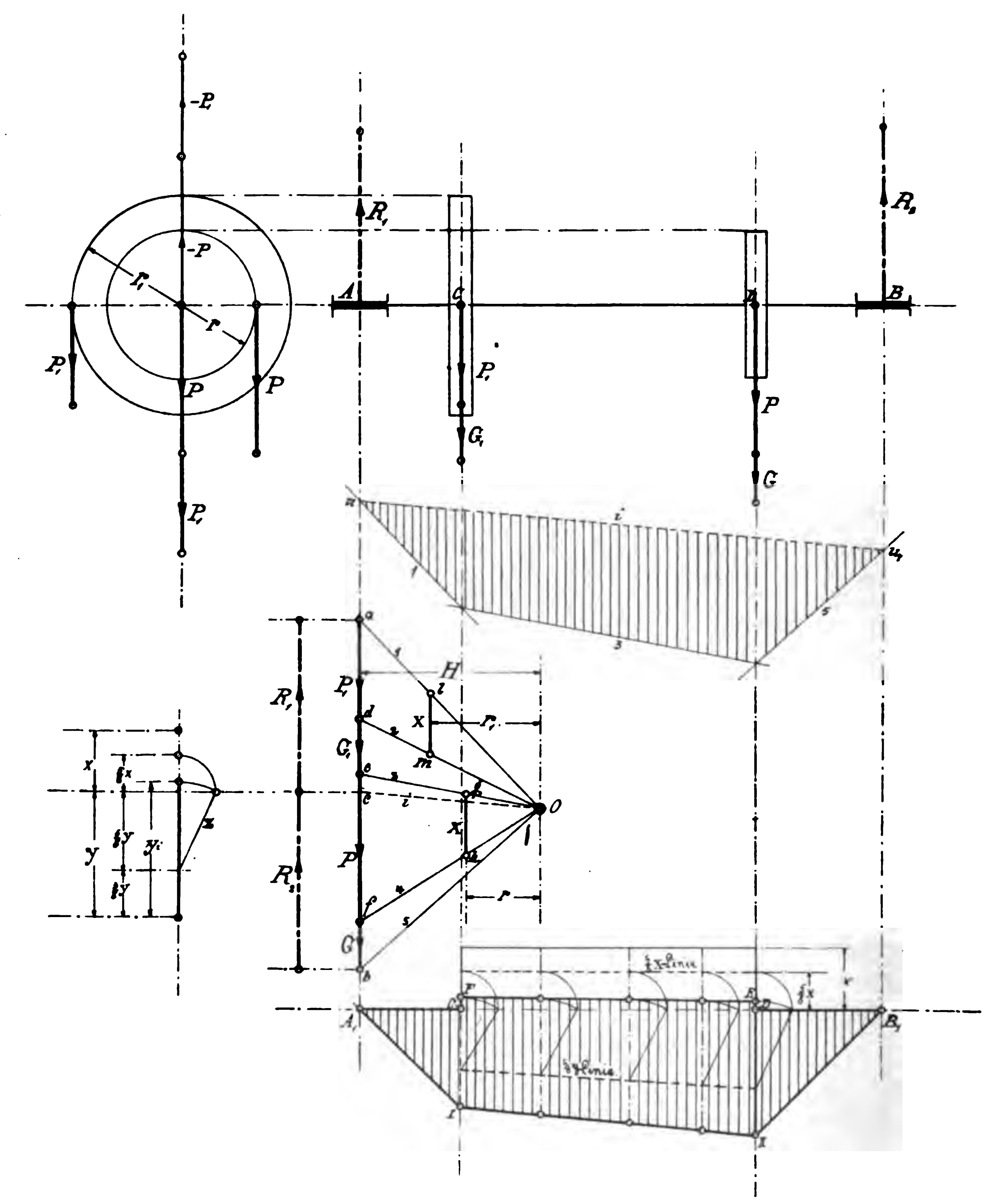


Fig. 143, 144 und 145.

und zeichnet die Biegemomentenfläche für die horizontale Basis $A_1 B_1$ (Fig. 144) um. Letzteres geschieht hier am schnellsten, indem man die zu den Querschnitten C und D gehörigen Ordinaten über $A_1 B_1$ aufträgt und deren Endpunkte I und II miteinander und mit A_1 und B_1 verbindet.

Da das Drehmoment zwischen D und C konstant, nämlich gleich $P \cdot r$ ist, und deshalb zeichnerisch durch ein Rechteck von der Basis r und der Höhe P dargestellt wird, so kann zwecks Kombination des Drehmomentes mit dem gleichzeitig auftretenden Biegemoment

$$P \cdot r = x \cdot H$$

gesetzt worden, worin H die zu den Biegeordinaten gehörige Poldistanz ist.

Die Gröfse von x ergibt sich aus dem Kräftepolygon Fig. 143, indem man im Horizontalabstande r von Pol O eine Parallele zu P zieht, welche die zu P gehörigen Polstrahlen 3 und 4 in g und h schneidet.

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke Ocf und Ogh folgt dann:

$$\frac{P}{x} = \frac{H}{r}$$

oder

$$Pr = x \cdot H.$$

Nachdem nun alle Momente auf denselben konstanten Hebelarm bezogen sind und über CD als Basis das Drehmomentenrechteck von der Höhe x aufgetragen wurde, ist man imstande, das in irgendeinem Querschnitt, z. B. D, herrschende ideelle Moment durch Zusammensetzung der zugehörigen Ordinaten x und y mittels der Formel:

$$M_i = \frac{3}{8} M_b + \frac{5}{8} \sqrt{M_b^2 + M_t^2},$$

zu bestimmen.

Bezeichnet man nämlich mit y_i die ideelle Biegeordinate, so kann obige Gleichung geschrieben werden:

$$y_i \cdot H = \frac{3}{8} y \cdot H + \frac{5}{8} \sqrt{y^2 \cdot H^2 + x^2 \cdot H^2}$$

und es folgt:

$$y_i = \frac{3}{8} y + \frac{5}{8} \sqrt{y^2 + x^2}.$$

Hierin ist:

$$z = \frac{5}{8} \sqrt{y^2 + x^2} = \sqrt{\left(\frac{5}{8} y\right)^2 + \left(\frac{5}{8} x\right)^2}$$

die Hypothenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Katheten $\frac{5}{8} x$ und $\frac{5}{8} y$ sind. Konstruiert man diese nach Fig. 145 und verlängert z noch um $\frac{3}{8} y$, so ist y_i gegeben.

Man wird nun die Begrenzungskurve EF der ideellen Biegeordinaten in diesem Falle am schnellsten bekommen, indem man nach Fig. 144 die $\frac{5}{8}$ x- und $\frac{5}{8}$ y-Linie zieht und die in Fig. 145 angegebene Konstruktion für möglichst viele Querschnitte vornimmt.

$A_1\,I\,II\,B_1\,D\,E\,F\,C\,A_1$ ist dann die totale, zwischen den Querschnitten C und D ideelle Biegemomentenfläche, mit Hilfe welcher die Profilbestimmung der Welle in der bekannten Weise vorgenommen wird.

Nachdem im vorstehenden die Vereinigung eines Biegemomentes mit dem im gleichen Wellenquerschnitt herrschenden Drehmoment zu einem ideellen Biegemoment gezeigt worden ist, wird es keine Schwierigkeit bereiten, jetzt gleich einen Belastungsfall zu behandeln, bei dem die analytische Wellenberechnung schon ziemlich kompliziert ist. Hierbei mögen auch schief wirkende Kräfte vorkommen, so dafs die in verschiedenen Ebenen erzeugten Biegemomente mit den Drehmomenten zu kombinieren sind.

Um die Einwirkung der gegebenen Kräfte auf die Welle klar zu veranschaulichen, sei wieder neben der Stirnansicht Fig. 146 die perspektivische Darstellung in Fig. 148 zu Hilfe genommen.

Die in A und B gelagerte Welle trage die Riemenscheiben I, II und III, von denen II und III Bewegung und Kraft von der Antriebsscheibe I erhalten. Alle an- und ablaufenden Riemenenden seien parallel angenommen und wie in Fig. 146 und Fig. 148 ersichtlich gerichtet. Wird der weiteren Vereinfachung wegen für die Spannung im gezogenen Riemenende die Umfangskraft P, für die im ziehenden dagegen die doppelte Kraft $2P$ gesetzt,

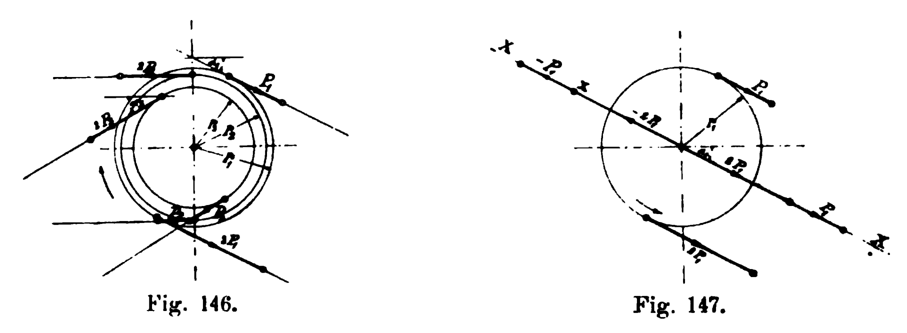


Fig. 146. Fig. 147.

so kann man zunächst die an den Scheiben II und III auftretenden Riemenspannungen ermitteln, wenn die Umfangskraft P_1 der treibenden Scheibe I als bekannt vorausgesetzt wird. Dies ist mittels Fig. 149 unter der Annahme geschehen, dafs die Momente der Umfangskräfte an den Scheiben II und III einander gleich, also je halb so grofs sind als das Moment $P_1 r_1$ an Scheibe I. Nur unter dieser Voraussetzung herrscht während des Ruhezustandes und der gleichförmigen Drehbewegung Gleichgewicht an der Welle.

Es mufs also sein:

$$\frac{P_1}{2} r_1 = P_2 r_2 = P_3 r_3.$$

Der Einflufs der schief wirkenden Kräfte P_1 und $2\,P_1$ und P_3 und $2\,P_3$ sowie der Horizontalkräfte P_2 und $2\,P_2$ sei erläutert an Hand der Fig. 147. Bringt man nämlich in der zu P_1 resp. $2\,P_1$ parallelen, zur Wellenachse senkrechten Ebene $X—X$ je zwei gleich grofse, aber entgegengesetzt gerichtete Kräfte P_1 und $-P_1$, ferner $2\,P_1$ und $-2\,P_1$ an, so erkennt man das Bestreben der erhaltenen Kräftepaare P_1 und $-P_1$ resp. $2\,P_1$ $-2\,P_1$, die Scheibe im ungleichen Sinne zu drehen, wobei $P_1 r_1$ das resultierende Drehmoment ist. Direkt an der Welle angreifend bleiben aber noch die biegenden Kräfte $2\,P_1$ und P_1 übrig, die sich unmittelbar zum Achsendruck $3\,P_1$ addieren.

Stellt man an den Scheiben *II* und *III* eine ähnliche Untersuchung an, so ergeben sich hier die Achsendrücke $3\,P_2$ und $3\,P_3$ und die dem Drehmoment $P_1 r_1$ entgegenwirkenden Momente $P_2 r_2$ und $P_3 r_3$.

An der Welle halten sich demnach die biegenden Kräfte $3\,P_3$, G_3, R_1, $3\,P_2$, G_2, $3\,P_1$, G_1 und R_2, sowie die Momente $P_1 r_1$, $P_2 r_2$ und $P_3 r_3$ das Gleichgewicht, wobei die geringen Reibungsmomente in den Lagern ver-

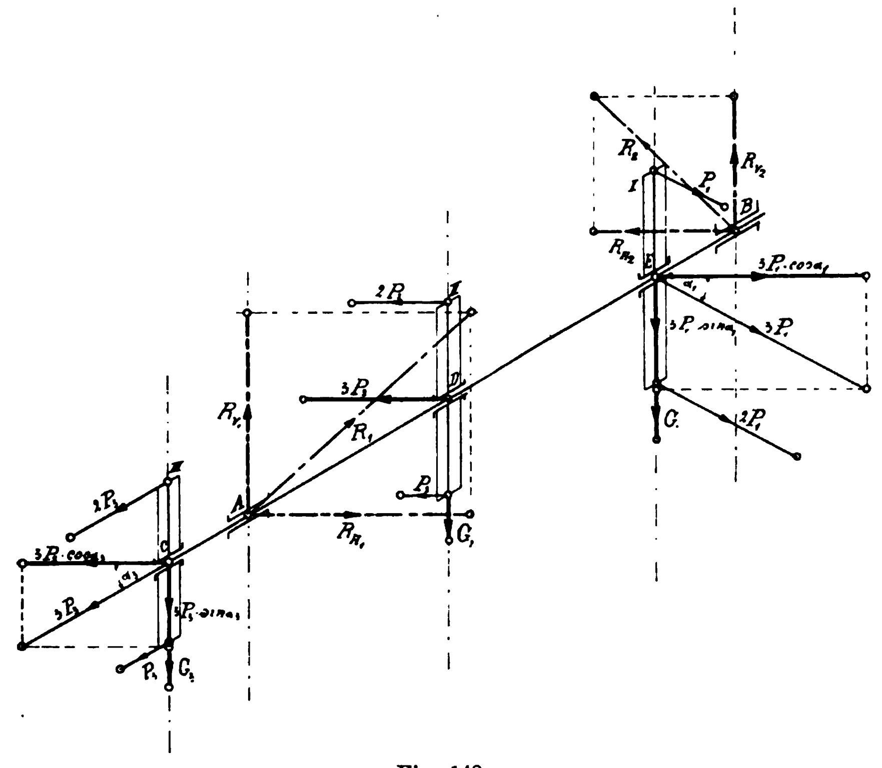


Fig. 148.

nachlässigt bleiben mögen. Zerlegt man die schief wirkenden Biegekräfte in Vertikal- und Horizontalkomponenten, so lassen sich, wie im vorigen Paragraphen gezeigt wurde, die von den vertikalen Kräften $3\,P_3 \sin \alpha_3$, G_3, G_2, $3\,P_1 \sin \alpha_1$ und G_1 und den horizontalen Kräften $3\,P_3 \cos \alpha_3$, $3\,P_2$ und $3\,P_1 \cos \alpha_1$ erzeugten Einzelmomentenflächen nach Fig. 150 aufzeichnen und nach Fig. 151 unter $C_1 B_1$ als Basis zu einer resultierenden Biegemomentenfläche $C_1 A_1 D_1 E_1 B_1 C_1$ vereinigen.

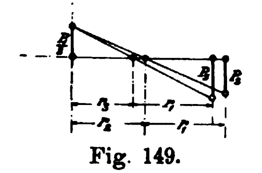


Fig. 149.

Letzteres ist hier durch direktes Abgreifen der Ordinaten aus den Einzelflächen geschehen, ohne erst die horizontale und vertikale Biegemomentenfläche mit einer gemeinsamen horizontalen Schlufslinie aneinanderzulegen.

Man ersieht aus Fig. 151, dafs das resultierende Biegediagramm von A_1 bis E_1 durch unstetige Kurven begrenzt wird, und dafs die links von Scheibe *II* liegenden Querschnitte nur sehr wenig auf Biegung beanspruch

werden. Diese Erscheinung findet ihre genügende Erklärung, wenn man die Einzelmomentenflächen betrachtet, bei welchen die untere links, die obere sogar links und rechts von *II* Nullmomente aufweist.

Die resultierende Momentenfläche ist nun zu kombinieren mit den von Scheibe *I* bis *III* weiter geleiteten Torsionsmomenten, die alle mit den Biegemomenten die Poldistanz *H* als Hebelarme gemeinsam haben müssen.

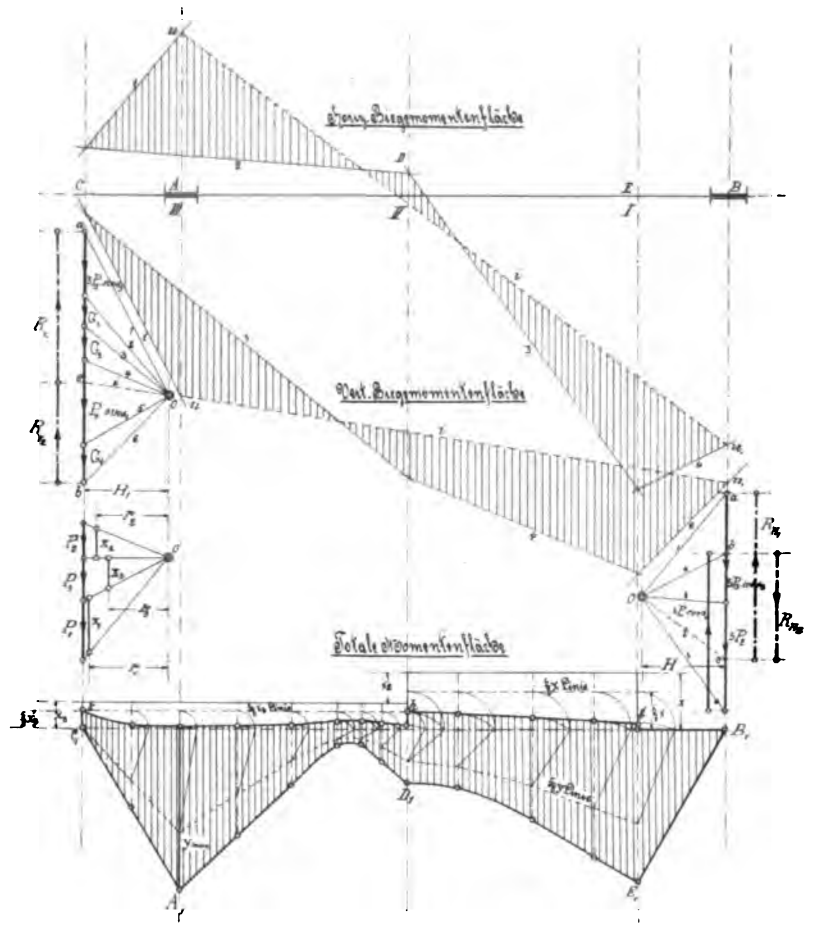


Fig. 150, 151 und 152.

Die zugehörigen Drehkräfte x_1, x_2 und x_3, deren Wirkungen am Hebelarm *H* die Wirkungen von $P_1 r_1$, $P_2 r_2$ und $P_3 r_3$ ersetzen sollen, ergeben sich dann aus Fig. 152. Zeichnet man deshalb über $B_1 C_1$ als Basis von Mitte der Scheibe *I* bis zur Mitte von *II* das Drehmomentenrechteck von der Höhe x_1 und von Mitte *II* bis *III* ein ebensolches von der Höhe x_3, so wird die Vereinigung dieser beiden Rechtecke mit der Fläche $C_1 A_1 D_1 E_1 B_1 C_1$ zu einer totalen, zwischen C_1 und E_1 ideellen Momentenfläche $C_1 A_1 D_1 E_1 B_1 g h k C_1$ nach der in Fig. 145 gegebenen Konstruktion vorgenommen und dann das theoretische Längsprofil der Welle aufgezeichnet.

Um sich nun noch genauer mit den zur Berechnung der Kraftwellen nötigen Konstruktionen vertraut zu machen und um gleichzeitig die Feststellung der Lagerabmessungen kennen zu lernen, die in besonderen Fällen von der im vorigen Paragraphen gegebenen abweichen kann, sollen einige praktische Aufgaben durchgearbeitet werden.

Aufgabe 1.

Es ist die hohle gufseiserne Welle des Wasserrades in Fig. 153 zu berechnen, welches bei $n = 16$ Umdrehungen in der Minute einen Effekt von $N = 16$ PS an ein aufserhalb des Lagers A sitzendes Zahnrad von $D = 2400$ mm Durchmesser und $G = 800$ kg Gewicht abgibt. Das Gesamt-

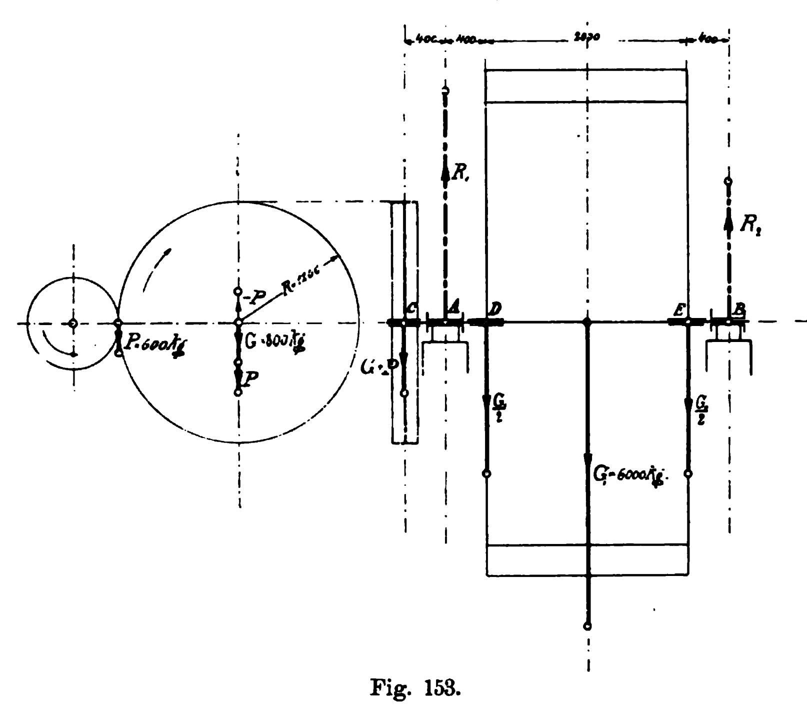


Fig. 153.

gewicht des Wasserrades $G_1 = 6000$ kg verteile sich gleichmäfsig auf die beiden Armsysteme. Das Höhlungsverhältnis der Welle sei $\alpha = \frac{d_1}{d} = 0{,}7$ und die zulässige Biegungsbeanspruchung $k = 2$ kg pro mm².

Lösung. Aus der Stirnansicht der Fig. 153 ersieht man, dafs bei Rechtsdrehung des Rades der Zahndruck P aufser seiner Drehwirkung für die Welle als vertikal abwärts gerichtete, biegende Kraft aufzufassen ist, die sich unmittelbar zum Radgewicht G addiert. Man berechnet P aus der bekannten Gleichung:

$$PR = 716\,200 \frac{N}{n}$$

zu:

$$P = 716\,200 \frac{N}{n \cdot R} = 716200 \cdot \frac{16}{16 \cdot 1200} = \sim 600 \text{ kg.}$$

Die Welle wird nun durch die vertikalen Kräfte $P + G$, $\frac{G_1}{2}$ und $\frac{G_1}{2}$ auf Biegung, aufserdem aber noch von C bis D durch PR und von D bis E durch $\frac{P}{2} \cdot R$ auf Verdrehung beansprucht.

Für die Aufzeichnung der zur Wellenberechnung erforderlichen totalen Biegungsmomentenfläche entwirft man deshalb zunächst nach Fig. 154 die von den Vertikalkräften herrührende Biegemomentenfläche, konstruiert diese nach Fig. 155 durch Verschiebung des Poles im Kräftepolygon für eine horizontale Schlufslinie um und vereinigt sie mit den Drehmomentenrechtecken. Die gesuchte Fläche ist dann $C_1\, D_1\, E_1\, B_1\, e\, f\, h\, k\, C_1$. In derselben ist $e E_1 = y_{max}$, so dafs E der gefährliche Querschnitt.

Für diesen gilt:

$$y_{max} \cdot H = 0{,}1 \frac{d_{max}^4 - d_{1max}^4}{d_{max}} \cdot k,$$

oder da

$$\frac{d_{1max}}{d_{max}} = 0{,}7.$$

$$1) \quad y_{max} \cdot H = 0{,}1\, d_{max}^3 (1 - 0{,}7^4) \cdot k,$$

also:

$$d_{max}^3 = \frac{y_{max} \cdot H}{0{,}1 \cdot k(1 - 0{,}7^4)}.$$

Mit Rücksicht auf den der Fig. 165 beigeschriebenen Kräftemafsstab 150 kg = 1 mm und Längenmafsstab 1 : 37,5 folgt dann:

$$d_{max}^3 = \frac{15{,}66 \cdot 150 \cdot 13{,}33 \cdot 37{,}5}{0{,}1 \cdot 2 \cdot 0{,}76} = 7\,730\,640 \text{ mm}^3,$$

woraus:

$$d_{max} = 198 \text{ mm Durchmesser.}$$

Für die Bestimmung irgendeines anderen Durchmessers d_x gilt:

$$2) \quad y_x \cdot H = 0{,}1 \frac{d_x^4 - d_{1x}^4}{d_x} \cdot k = 0{,}1\, d_x^3 (1 - 0{,}7^4) \cdot k.$$

Folglich aus Gleichung 1 und 2:

$$\frac{y_{max}}{y_x} = \frac{d_{max}^3}{d_x^3}.$$

Es herrscht also die gleiche Beziehung wie bei Wellen mit Kreisquerschnitt.

Die graphische Darstellung von d_x^3 nach Fig. 156 als vierte Proportionale ermöglicht nun, so viele äufsere Durchmesser zu berechnen, bis das theoretische Wellenprofil in Fig. 157 aufgezeichnet werden kann. Um letzterem das praktische Profil umschreiben zu können, sind nur noch die Längen der Zapfen in den Lagern A und B festzustellen, und zwar gilt, wenn R den Zapfendruck bedeutet, mit Rücksicht auf Festigkeit:

$$R \cdot \frac{l}{2} = 0{,}1 \frac{d^4 - d_1^4}{d} \cdot k = 0{,}1\, d^3 (1 - 0{,}7^4) \cdot k$$

und mit Rücksicht auf Flächendruck:

$$R = d \cdot l \cdot p$$

oder durch Division:

$$\frac{l}{2} = \frac{0{,}1\, d^3 (1 - 0{,}7^4) \cdot k}{d \cdot l \cdot p},$$

also:

$$\frac{l}{d} = \sqrt{0{,}2\,\frac{k}{p}\,(1 - 0{,}7^4)}.$$

Wählt man die Lagerpressung $p = 0{,}2$ kg pro mm², so folgt:

$$\frac{l}{d} = \sqrt{0{,}2\,\frac{2}{0{,}2}\cdot 0{,}76} = 1{,}23 = \sim 1{,}3.$$

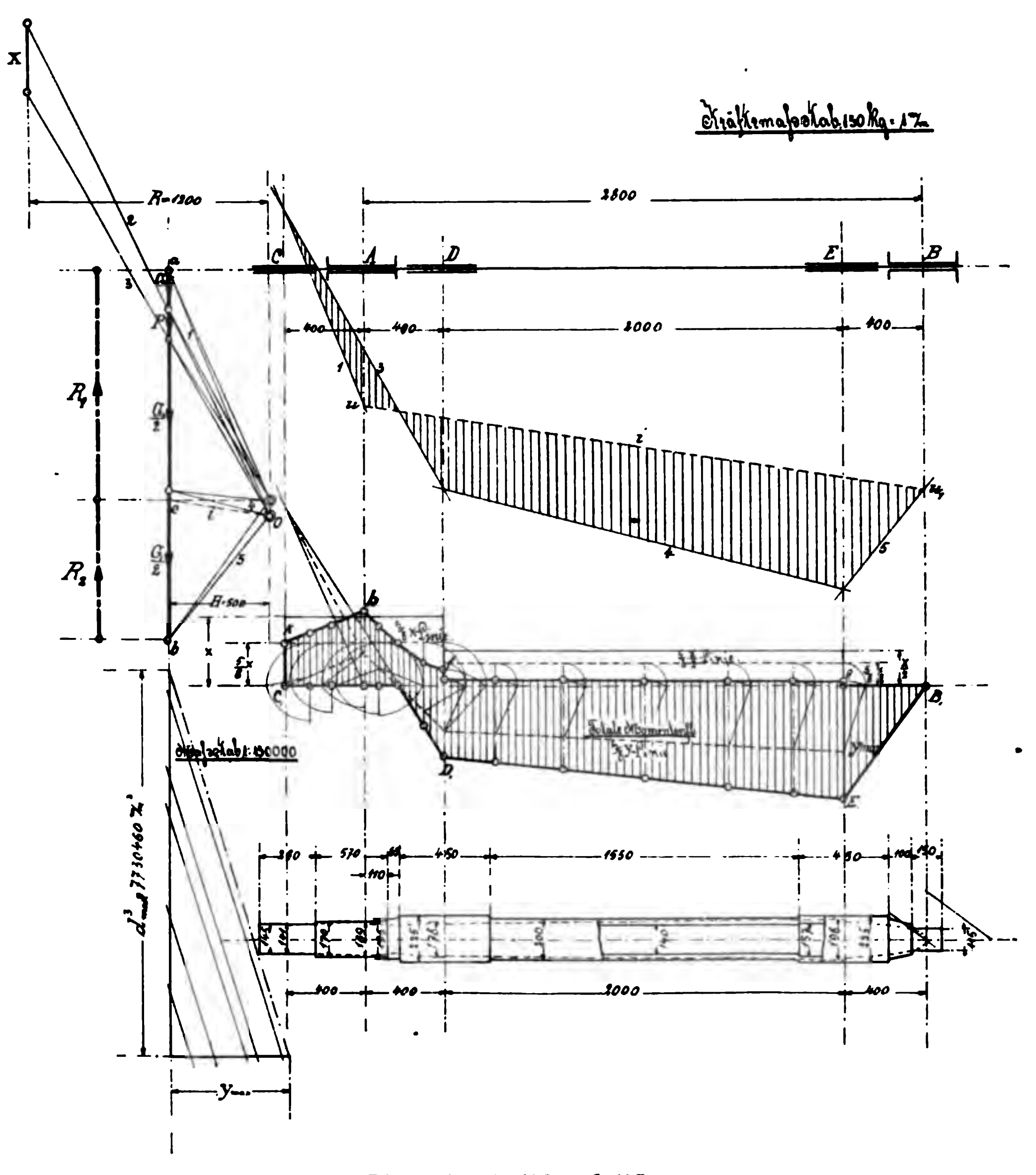


Fig. 154, 155, 156 und 157.

Die in Fig. 157 angedeutete Konstruktion ergibt dann für Lager A:

$$d_A = 170 \text{ mm Durchmesser und } l_A = 220 \text{ mm}$$

und für Lager B:

$$d_B = 115 \text{ mm Durchmesser und } l_B = 150 \text{ mm.}$$

Nachdem nun mit Rücksicht auf die Nabenlänge der Räder die äufsere Form der Welle endgültig festgelegt worden ist, kann auch die Innenwandung unter Beobachtung des konstanten Verhältnisse $d_1 = 0{,}7\,d$, wie in Fig. 157 angedeutet, hineingezeichnet werden.

Aufgabe 2.

Es ist die mit der Vorgelegewelle einer 300 PS-Laval-Turbine direkt gekuppelte Kraftwelle Fig. 159 zu berechnen, welche bei $n = 700$ Touren pro Minute 200 PS an eine 147-Kilowatt-Dynamo und die restlichen 100 PS mittels Riementriebes an eine Zentrifugalpumpe abgeben soll. Das Ankergewicht betrage $G = 3000$ kg.

Lösung. Um keinen zu breiten, unelastischen Riemen zu erhalten, sei eine Riemengeschwindigkeit $v = 24{,}5$ m gewählt. Der Radius der Antriebsscheibe auf der Kraftwelle wird dann aus:

$$v = \frac{r \cdot \pi \cdot n}{30}$$

$$r = \frac{30 \cdot v}{\pi \cdot n} = \frac{30 \cdot 24{,}5}{\pi \cdot 700} = \backsim 335 \text{ mm}$$

und die normale Umfangskraft:

$$P = 716200 \frac{N}{n \cdot r} = 716\,200 \cdot \frac{100}{700 \cdot 335} = \backsim 305 \text{ kg.}$$

Wählt man eine dreifache Übersetzung ins Langsame, so dafs der Radius der Pumpenantriebsscheibe:

$$R = 3r = 1005 \text{ mm}$$

und nach Fig. 158 einen Achsenabstand:

$$A = R + r + 2000 = 1005 + 335 + 2000 = 3340 \text{ mm,}$$

so kann die Spannung im gezogenen Riemenende gleich der Umfangskraft P und die im ziehenden Trum zu $Z = 2\,P$ angenommen werden. Für die letztere Spannung ergibt sich dann die Riemenbreite aus:

$$Z = b \cdot \delta \cdot k.$$

Ist hierin $\delta = 7$ mm die Riemendicke und $k = 0{,}25$ kg pro Quadratmillimeter die zulässige Zugspannung, so folgt:

$$b = \frac{Z}{\delta \cdot k} = \frac{610}{7 \cdot 0{,}25} = \backsim 350 \text{ mm.}$$

Bei einer Neigung der Wellenachsen von $\alpha = 30^0$ ergeben sich nun nach Fig. 158 die Spannungsrichtungen von P und $2\,P$ und hiermit mittels der Parallelogramm- oder Kräftedreieckkonstruktion (Fig. 158 und 159) der Achsendruck $K = \backsim 950$ kg und dessen Vertikal- und Horizontalkomponenten $K_1 = 525$ kg und $K_2 = 775$ kg. Schätzt man noch das Scheibengewicht auf $G_1 = 100$ kg, so kommen für die Wellenberechnung auf Biegung die drei Vertikalkräfte G, K_1 und G_1 und die Horizontalkraft K_2 in Frage. Aufserdem wird ein den 300 PS entsprechendes Drehmoment von der Vorgelegewelle bis zur Mitte C der Dynamo geleitet und von hier ab ein

dreimal so kleines Moment $P \cdot r$ bis zur Mitte D der Riemenscheibe. Man entwirft daher zunächst nach Fig. 160 die Vertikal- und Horizontalbiegemomentenfläche, vereinigt beide nach Fig. 161 zur resultierenden Biegemomentenfläche $A_1\ C_1\ B_1\ D_1$ und konstruiert nach Auftragen der Dreh-

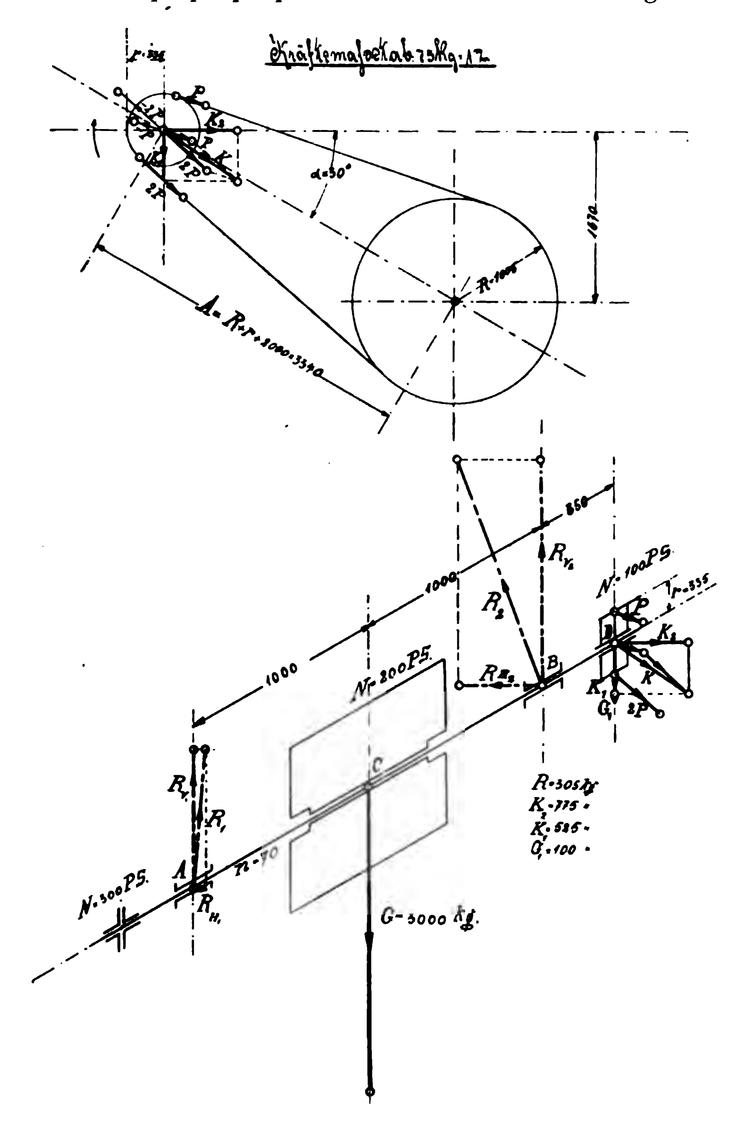


Fig. 158 und 159.

momentenrechtecke die ideelle Momentenfläche $A_1\ C_1\ B_1\ D_1\ e\, f\, g\ A_1$, mittels welcher das theoretische Wellenprofil für eine Beanspruchung von $k = 5$ kg pro Quadratmillimeter zu bestimmen ist.

Wegen der hohen Tourenzahl der Welle genügt die Lagerzapfenberechnung auf Festigkeit und Flächendruck nicht mehr, man mufs auch noch

für eine gute Wärmeableitung sorgen, damit die Zapfen nicht heifslaufen. Deshalb ist die Lagerlänge für Schmiedeisen auf Rotgufs zu machen:

$$l \gtrless \frac{R \cdot n}{4000} \text{ mm},$$

worin R der Lagerdruck und n die Tourenzahl pro Minute:

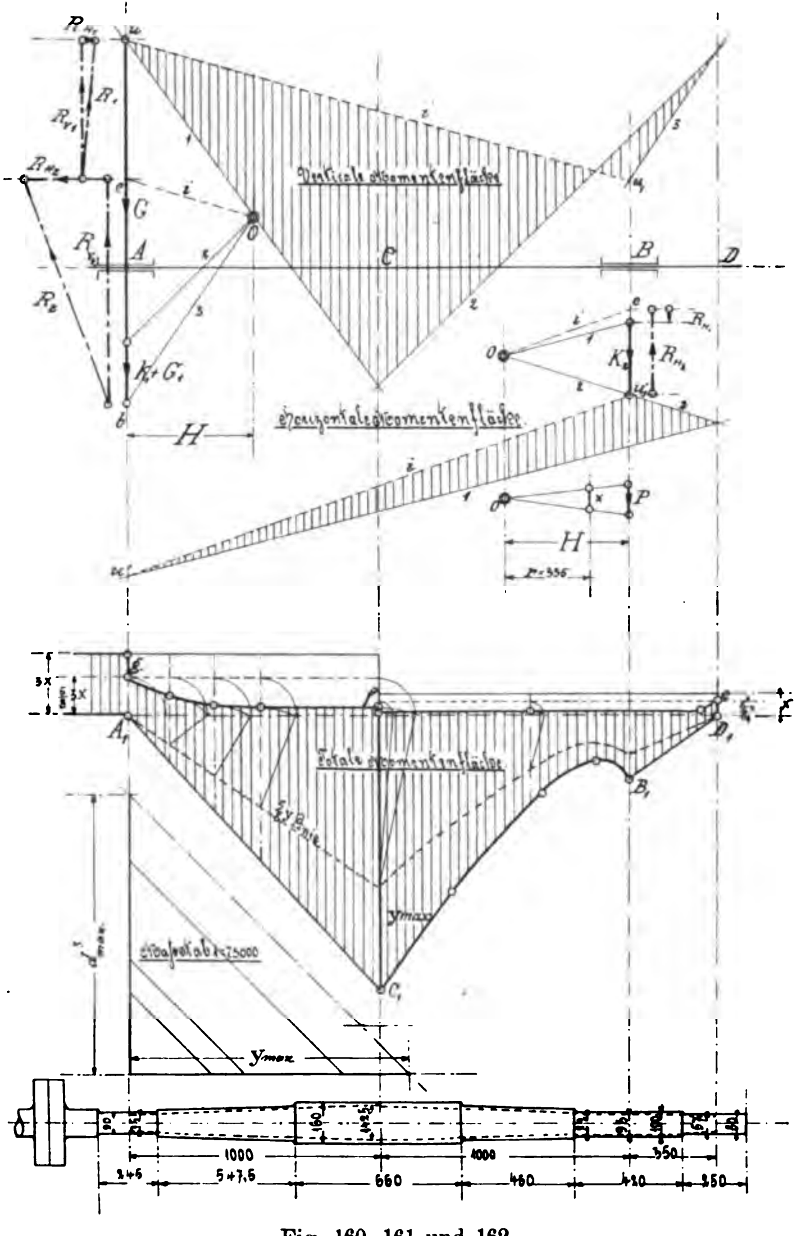


Fig. 160, 161 und 162.

Nach Fig. 160 ergibt sich: $R_1 = 18,66 \cdot 75 = 1400$ kg und $R_2 = 32 \cdot 75 = 2400$ kg, folglich:

$$l_A = \frac{R_1 \cdot n}{4000} = \frac{1400 \cdot 700}{4000} = 245 \text{ mm},$$

$$l_B = \frac{R_2 \cdot n}{4000} = \frac{2400 \cdot 700}{4000} = 420 \text{ mm}.$$

Für Lager A ist also:

$$\frac{l_A}{d_A} = \frac{245}{90} = 2,722$$

und für Lager B:

$$\frac{l_B}{d_B} = \frac{420}{100} = 4,2.$$

§ 18. Die Kurbelwellen.

Die Kurbelwellen haben bei den Kolbendampf- resp. Kolbengasmaschinen meist den Zweck durch Umwandlung der hin und her gehenden Bewegung des Kolbens in eine Drehbewegung die Abnahme der von Dampf- oder Gasgemenge erzeugten Arbeit an eine Dynamo oder eine mit der Welle verkeilte Riemen- oder Seilscheibe zu ermöglichen. Soll letztere zum Antriebe von Kolbenpumpen, Kompressoren oder dergleichen dienen, so bedingt die Umwandlung der Drehbewegung in eine hin und her gehende ebenfalls die Anwendung eines Kurbelgetriebes als Vermittlungsgliedes. Auch bei einer direkten Kupplung des Antriebskolbens eines Motors mit einer Pumpe, Kompressor usw. läfst sich der Kurbeltrieb nicht umgehen, wenngleich in diesem Falle die Welle nur das zur Erzeugung einer gewünschten Gleichförmigkeit des Maschinenganges erforderliche Schwungrad trägt. Das Anwendungsgebiet der Kurbelwellen im Maschinenbau ist deshalb ein so grofses und wichtiges, dafs auf eine zuverlässige Berechnung derselben ein ganz besonderer Wert zu legen ist.

Bei allen Kurbelwellen dürfen die etwa vorkommenden Riemenzüge und Scheibengewichte als konstante Kräfte angesehen werden, wogegen die von der Pleuelstange zur Kurbel geleiteten Kräfte bei jedem Drehungswinkel der Welle verschieden grofs sind, so dafs für eine theoretisch genaue Untersuchung der Welle unendlich viele Beanspruchungsdiagramme aufzuzeichnen wären. Für die praktische Rechnung würde es natürlich genügen, einige für die Wellenbeanspruchung ungünstige Kurbelstellungen aufzusuchen und nach Ermittlung der auf die Kurbelzapfen reduzierten Drücke die totalen Biegungsmomentenflächen zu entwerfen, wobei dann durch Aufeinanderlegen derselben die zu jedem Wellenquerschnitt gehörige gröfste y-Ordinate abgegriffen werden könnte.

Im allgemeinen wird man sich mit der Berücksichtigung von vier Kurbelstellungen begnügen können: den beiden Totlagen, bei denen die Biegungsmomente meist am gröfsten, aber die Drehmomente gleich Null sind, und den beiden Normallagen, bei welchen die Pleuelstange mit der Kurbel einen Winkel von 90^0 einschliefst, so dafs die Drehmomente ihr Maximum erreichen und die Biegemomente ebenfalls noch eine beträchtliche Gröfse besitzen.

In besonderen Fällen, z. B. bei der Berechnung der gekröpften Welle einer Gasmaschine, die im Vier- oder Zweitakt arbeitet, wird, wie ein späteres

Beispiel zeigt, meist diejenige Kurbelstellung die ungünstigste sein, bei welcher der Kolben ca. 3 % des Hubweges den Totpunkt überlaufen' hat; denn dann ist gewöhnlich die Verpuffungsendspannung erreicht. Ferner würde der Entwurf einer einzigen Momentenfläche, und zwar für die Kurbeltotlage, genügen, wenn z. B. ein Luftkompressor direkt mittels der durchgehenden Kolbenstange einer Dampfmaschine angetrieben wird. Die Kurbeltotlage wird hier unter allen Umständen die ungünstigste Wellenbeanspruchung hervorrufen, weil bei dieser Stellung die Spannung der im schädlichen Raum des Kompressors eingeschlossenen Druckluft im Verein mit dem gröfsten Dampfüberdruck biegend auf den Kurbelzapfen einwirkt.

Auf die verschiedenen Sonderfälle kann hier natürlich nicht genauer eingegangen werden; es soll genügen, diejenigen Kurbelwellen genauer zu betrachten, deren Verwendung die häufigste ist. Der einfacheren Behandlung wegen soll dann für die Kräftebestimmung an der Kurbel und den Entwurf der Momentenflächen für Welle und Kurbel immer direkt ein Zahlenbeispiel zugrunde gelegt werden.

1. Welle mit Stirnkurbel.

Für eine liegende Einzylindermaschine von $D = 400$ mm Zylinderdurchmesser und $s = 600$ mm Hub, welche $n = 90$ Touren pro Minute macht, mit 6 atm absoluter Frischdampfspannung und Auspuff in die Atmosphäre arbeitet, soll die schmiedeiserne Welle mit Stirnkurbel berechnet werden. Das $G = 4000$ kg schwere Schwungrad vom Radius $R = 1600$ mm soll gleichzeitig als Rimenscheibe dienen und die ganze in die Welle geleitete Arbeit wieder zum Antrieb von Transmissionswellen abgeben. Die Entfernung von Mitte Schwungrad bis Mitte Kurbellager sei 1200 mm und bis Mitte Aufsenlager 600 mm. Ferner sei der Riemenzug um $\alpha_1 = 20^0$ gegen die Horizontale nach aufwärts gerichtet. —

Die Beanspruchung der Welle durch die rückwirkenden Kräfte, die infolge der Betätigung der Steuerorgane auftreten, kann im allgemeinen vernachlässigt werden, und zwar ist es gleichgültig, ob die Maschine mit einer Schieber- oder einer Ventilsteuerung ausgerüstet ist. Die sowohl in den Exzentern einerseits als auch in den Steuerwellenantriebsrädern andererseits auftretenden Kräfte erzeugen so geringe Biege- und Drehmomente, dafs diese gegenüber den von den Kurbelkräften, Schwungradgewichten und Seilzügen herrührenden eine ganz untergeordnete Rolle spielen.

Zur Erhöhung der Sicherheit bei der Wellen- und Kurbelberechnung empfiehlt es sich nun, der Maschine eine Maximalfüllung über 50 % zugrunde zu legen, und zwar auch dann, wenn die Steuerung eine solche gar nicht hergeben kann.

Man erhält auf diese Weise nach Fig. 163 und 164 direkt die beiden ungünstigsten Kurbelstellungen, wenn beim Hin- und Rücklauf des Kolbens die Pleuelstange mit der Kurbel den Winkel $\varphi = 90^0$ einschliefst. Bei diesen Kurbelstellungen ist der Beschleunigungsdruck der hin und her gehenden Massen gleich Null, so dafs der volle maximale Dampfüberdruck mittels der Pleuelstange zum Kurbelzapfen weitergeleitet wird, wobei die Pleuelstangenkraft P gleichzeitig als gröfste Tangentialkraft an der Kurbel sowohl das maximale Biege- als auch das maximale Drehmoment erzeugt.

Ist $p_1 = 6$ atm die absolute Frischdampfspannung, $p_0 = 1,2$ atm der absolute Gegendruck, so wird bei den genannten Kurbelstellungen der Dampfüberdruck pro cm² Kolbenfläche:

$$p = p_1 - p_0 = 6 - 1,2 - 4,8 \text{ atm.}$$

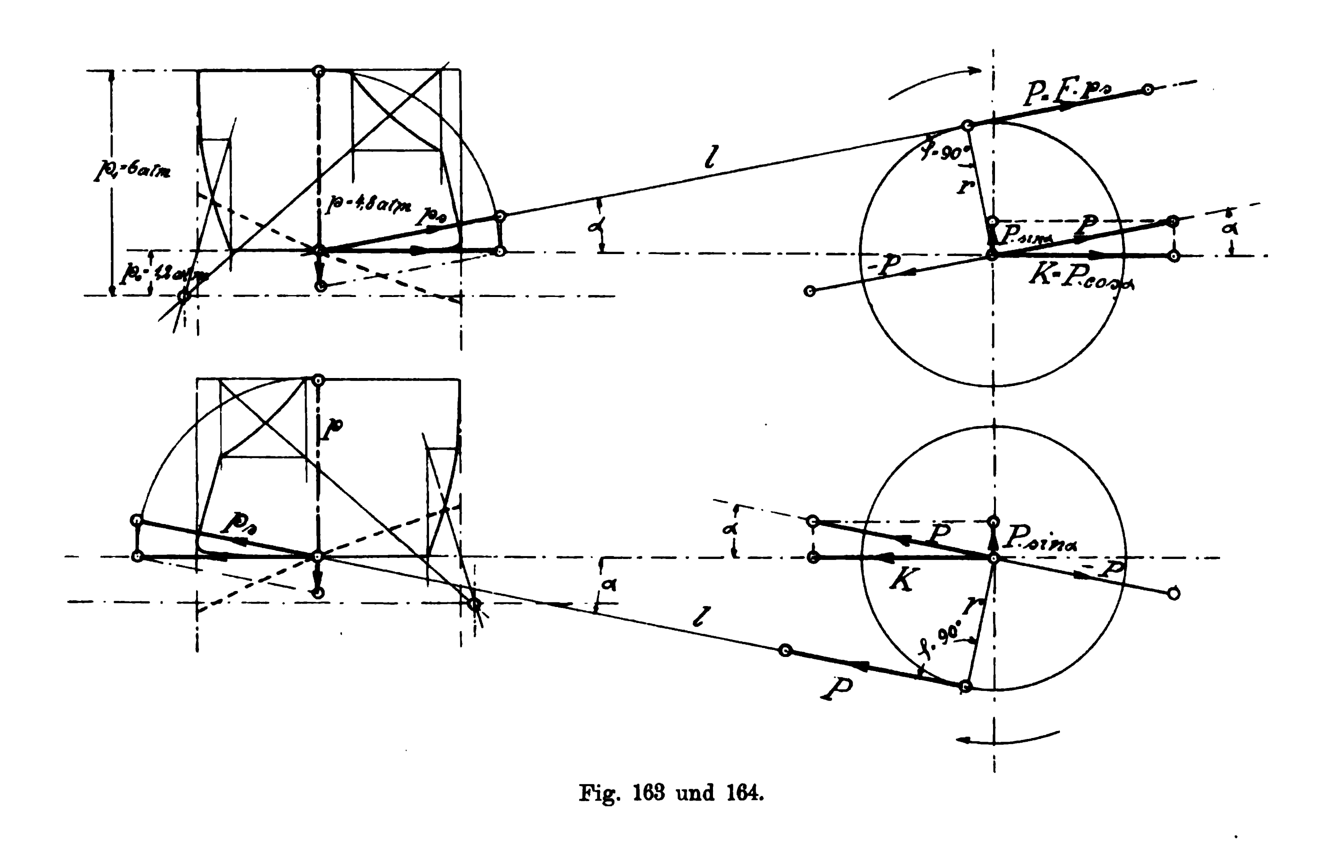


Fig. 163 und 164.

Sieht man noch von dem geringen Kolbenstangenquerschnitt ab, so ergibt sich der gesamte Maximaldampfüberdruck auf die ganze Kolbenfläche $F = D^2 \cdot \frac{\pi}{4}$ zu:

$$K = D^2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot p = 40^2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 4{,}8 = \backsim 6030 \text{ kg.}$$

Bei der gebräuchlichen Annahme, dafs $\frac{r}{l} = \frac{1}{5}$, folgt dann für $\varphi = 90^0$ der Neigungswinkel der Pleuelstange zur horizontalen Zylinderachse:

$$\alpha = \backsim 11^0 \qquad \left(\operatorname{tg} \alpha = \frac{r}{l} = \frac{1}{5}\right)$$

und die Pleuelstangenkraft:

$$P = \frac{K}{\cos \alpha} = \frac{6030}{\cos 11^0} = \backsim 6150 \text{ kg.}$$

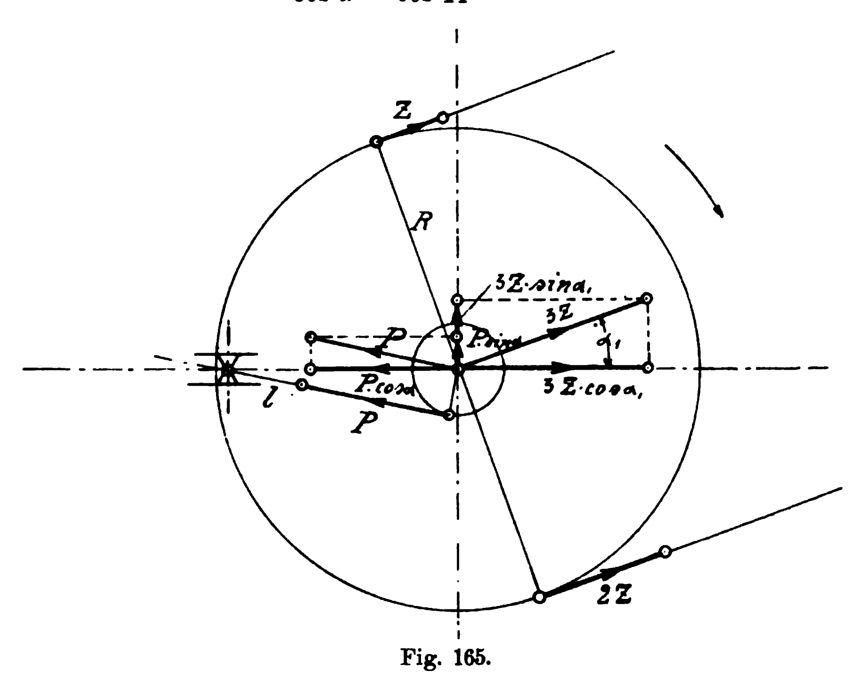


Fig. 165.

Zerlegt man jetzt die biegende Kraft in die Horizontal- und Vertikalkomponenten $P \cos \alpha = 6150 \cdot 0{,}98 = 6030$ kg und $P \sin \alpha = 6150 \cdot 0{,}19 = \backsim 1165$ kg, so sind die vom gröfsten Dampfdruck herrührenden Dreh- und Biegekräfte der Welle gegeben. Trotzdem diese Kräfte nun für die beiden in Frage kommenden Kurbelstellungen gleich grofs sind, wirken sie doch nicht gleich ungünstig auf die Welle ein; vielmehr zeigt die Stirnansicht der Welle in Fig. 165 resp. die schematische Darstellung in Fig. 166, dafs die untere Kurbelstellung beim Kolbenrücklauf die absolut ungünstigste sein mufs, weil hier die Horizontalkraft $P \cos \alpha$ im gleichen Sinne biegend auf die Welle einwirkt wie der Riemenzug. Diese Kurbelstellung ist demnach für die Wellen- und Kurbelberechnung mafsgebend.

Zur Bestimmung des Riemenzuges wäre bei gegebener Maximalleistung der Maschine die Formel:

$$Z = \frac{75\,N}{v}$$

zu verwenden, worin N die Leistung in PS und v die Riemengeschwindigkeit in m.

Mit Rücksicht darauf, dafs bei ordnungsgemäfs aufgelegten Riemen meist eine gröfsere Selbstspannung vorhanden ist, empfiehlt es sich dann Z noch um ca. 30 % zu vergröfsern. Da hier die Leistung nicht unmittelbar gegeben ist, so kann mit Hinblick auf die erwähnte Selbstspannung der Riemenzug mit erhöhter Sicherheit nach Fig. 165 aus:

$$Z \cdot R = P \cdot r$$

zu:

$$Z = P \cdot \frac{r}{R} = 6150 \cdot \frac{30}{160} = \sim 1150 \text{ kg}$$

berechnet werden.

Bei einer geringen Geschwindigkeitsübersetzung von der Maschinenwelle auf die Haupttransmission genügt es, die Spannungsrichtungen im ziehenden und gezogenen Trum

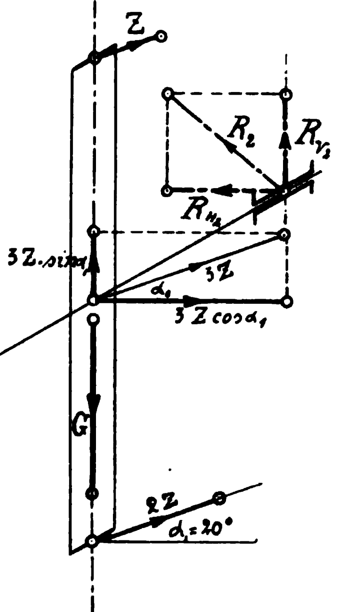


Fig. 166.

als parallel anzunehmen, so dafs die resultierende, um $\alpha_1 = 20^0$ geneigte Biegekraft für die Welle eine Gröfse von $3\,Z = 3 \cdot 1150 = 3450$ kg erreicht.

Durch Zerlegung ergibt sich dann die Horizontalkraft $3\,Z \cos \alpha_1 = 3450 \cdot 0{,}94 = \sim 3245$ kg und die Vertikalkraft $3\,Z \sin \alpha_1 = 3450 \cdot 0{,}342 = \sim 1180$ kg.

Alle für den Entwurf der Momentenflächen mafsgebenden Kräfte sind nun bestimmt und in Fig. 166 eingezeichnet. Aus der Figur erkennt man, dafs die Welle durch die horizontalen Kräfte $P \cos \alpha$ und $3\,Z \cos \alpha_1$ und die vertikalen Kräfte $P \sin \alpha$ und $G - 3\,P \sin \alpha_1$ auf Biegung, aufserdem aber vom Kurbelarm bis zur Schwungradmitte durch $P \cdot r$ auf Verdrehung beansprucht wird, während die Kurbel durch P gebogen und, wie Fig. 167 veranschaulicht, auch noch durch P am konstanten Hebelarm r_1 verdreht wird.

Um die Welle aufzeichnen zu können, mufs zunächst nach Fig. 167 die Entfernung

$$x = \frac{l_1}{2} + b + a + \frac{L_1}{2}$$

von Mitte Kurbelzapfen bis Mitte Kurbellager festgelegt werden. Ist der Zapfen aus Gufsstahl, wofür $k = 5$ kg mm² und $p = 0,5$ kg mm², so folgt:

$$\frac{l_1}{d_1} = \sqrt{0,2\,\frac{k}{p}} = \sqrt{0,2 \cdot \frac{5}{0,5}} = \sim 1,4,$$

also für $P = 6150$ kg aus:

$$P \cdot \frac{l_1}{2} = 0,1\,d_1^3 \cdot k$$

oder:

$$P \cdot 0,7\,d_1 = 0,1\,d_1^3 \cdot k$$

$$d_1 = \sqrt{\frac{7 \cdot P}{k}} = \sqrt{\frac{7 \cdot 6150}{5}} = \sim 95 \text{ mm.}$$

Demnach ist $l_1 = 1,4\,d = 1,4 \cdot 95 = \sim 134$ mm, also $\frac{l_1}{2} = 67$ mm.

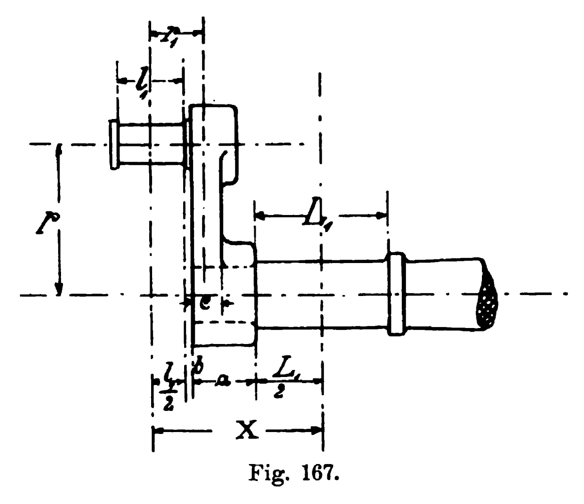


Fig. 167.

Der Zapfenanlauf sei $b = 3$ mm. Die Lagerlänge wird in der Regel ein Maximum, wenigstens von 90 Touren aufwärts, wenn jegliches Heifslaufen ausgeschlossen sein soll. Mit Rücksicht hierauf ergibt sich für Schmiedeeisen auf Rotgufs:

$$L_1 \geqq \frac{R_1\,n}{4000} \text{ mm,}$$

worin R_1 der Lagerdruck und n die Tourenzahl pro Minute. Der Lagerdruck kann durchschnittlich eine Maximalgröfse von $R_1 = 1,2\,P$ erreichen, so dafs hier:

$$L_1 \geqq \frac{1,2\,P \cdot n}{4000} \geqq \frac{1,2 \cdot 6150 \cdot 90}{4000} \geqq 161 \text{ mm.}$$

Gewählt sei $L_1 = 220$ mm, um auch den später nachzurechnenden Flächendruck möglichst gering zu halten. Die Nabenlänge der Kurbel sei mit $a = \frac{L_1}{2} = 110$ mm reichlich lang angenommen, womit der Vorteil gegeben ist, dafs nötigenfalls die Kurbellagerlänge noch etwas vergröfsert werden kann.

Es ist somit:

$$x = 67 + 3 + 110 + 110 = 290 \text{ mm}.$$

Nach Fig. 168 wird jetzt die Wellenachse maſsstäblich aufgezeichnet und bei gleicher Poldistanz H der Kräftepläne die vertikale und horizontale Biegemomentenfläche entworfen. Dann ergeben sich zunächst die in den Lagern A und B auftretenden Reaktionen mit $R_1 = 5900$ kg und $R_2 = 3800$ kg, und man ersieht, daſs das im voraus geschätzte $R_1 = 1{,}2\, P = 7380$ kg reichlich groſs war, was natürlich für die Bestimmung der Kurbellagerlänge $L_1 = 220$ mm nur vorteilhaft gewesen ist.

Nach Fig. 169 lassen sich die Einzelmomentenflächen zu einem resultierenden Biegemomentendiagramm $C_1\, A\, D\, B_1\, C_1$ vereinigen, welches mit den von Kurbelnabe bis Schwungradmitte konstanten Drehmomenten $P r = x \cdot H$ kombiniert, die totale — von E bis D_1 ideelle — Biegemomentenfläche $C_1\, A\, D\, B_1\, D_1\, D'\, E'\, E\, C_1$ ergibt. Mit Hilfe dieser wird unter Benutzung der Fig. 170 das theoretische Wellenprofil (Fig. 171) ermittelt und dann die für die Ausführung der Welle passende Form konstruiert. Wird hierbei der Kurbellagerdurchmesser mit $D_1 = 175$ mm festgelegt, so ergibt eine Nachrechnung auf Flächenpressung durch den wirklich vorhandenen Druck $R_1 = 5900$ kg

$$p = \frac{R_1}{L_1 \cdot D_1} = \frac{5900}{220 \cdot 175} = \backsim 0{,}153 \text{ kg mm}^2.$$

Dieses Resultat ist als recht günstig zu bezeichnen, da für Kurbellager sogar noch ein spezifischer Flächendruck bis $p = 0{,}35$ kg mm² als zulässig angesehen wird.

In der Zeichnung ist:

$$\frac{L_1}{D_1} = \frac{220}{175} = \backsim 1{,}25.$$

Behält man dieses Verhältnis auch für die Auſsenlager bei, so ergibt die in Fig. 171 angedeutete bekannte Konstruktion:

$$D_2 = 75 \text{ mm und } L_2 = 1{,}25 \cdot 75 = \backsim 96 \text{ mm}.$$

Der spezifische Flächendruck ist dann:

$$p = \frac{R_2}{L_2 \cdot D_2} = \frac{3800}{96 \cdot 75} = 0{,}53 \text{ kg mm}^2.$$

Da dieser Wert zu groſs ist, also die Gefahr vorliegt, daſs das Schmieröl aus den Lagerschalen herausgepreſst wird, so muſs der Zapfen verstärkt werden. Wählt man $D_2 = 100$ mm und $L_2 = 125$ mm, so ergibt sich der zulässige Wert:

$$p = \frac{3800}{125 \cdot 100} = \backsim 0{,}3 \text{ kg mm}^2.$$

Mit Rücksicht auf Heiſslaufen muſs sein:

$$L_2 \geqq \frac{R_2 \cdot n}{4000} \geqq \frac{3800 \cdot 90}{4000} \geqq 85{,}5 \text{ mm}.$$

Auch diese Bedingung ist erfüllt.

Die Kontrolle der Kurbelzapfenabmessungen mittels der Momentenfläche ergibt dieselben Gröſsen, wie analytisch festgestellt wurde, so daſs $d_1 = 95$ mm und $l_1 = 134$ mm ebenfalls beibehalten werden kann.

Die schmiedeeiserne Kurbel wird, wie üblich, mit rechteckigem Querschnitt ausgeführt und bekommt günstige Abmessungen, wenn die konstante

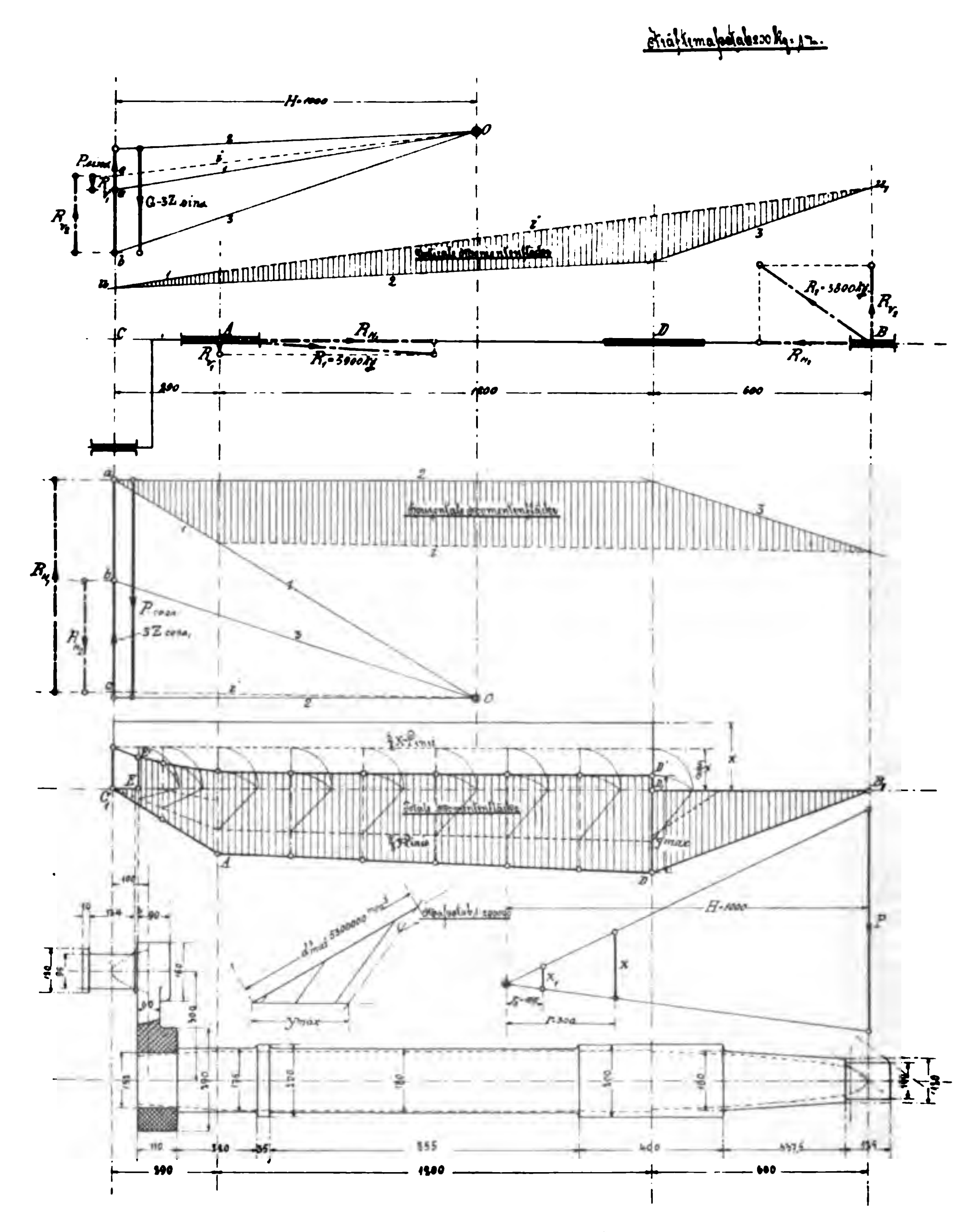


Fig. 168, 169, 169 a, 170 und 171.

Armbreite gleich dem fünften Teil des Kurbelradius angenommen wird. Hier ist also:

$$c = \frac{r}{5} = 60 \text{ mm.}$$

Der Kurbelarm wird auf Biegung und Verdrehung als Körper gleicher Festigkeit berechnet.

Das Biegemoment wird in der horizontalen Wellenebene X—X ein Maximum (Fig. 172) und ist hier:

$$M_{max} = P \cdot r = x \cdot H = \text{Torsionsmoment der Welle.}$$

Nach dem Zapfen zu nimmt das Moment proportional dem kleiner werdenden Hebelarm allmählich ab und ist in der Kurbelzapfenebene Y—Y selbst gleich Null. Die Biegemomentenfläche des Armes ist demnach ein rechtwinkliges Dreieck von der Höhe r, dessen Basis x die gröſste Biegeordinate darstellt. Ist $r_1 = 100$ mm (Fig. 171) der Schwerpunktsabstand des Kurbelarmes von Mitte Zapfen, so ist das konstante Drehmoment:

$$M_t = P \cdot r_1.$$

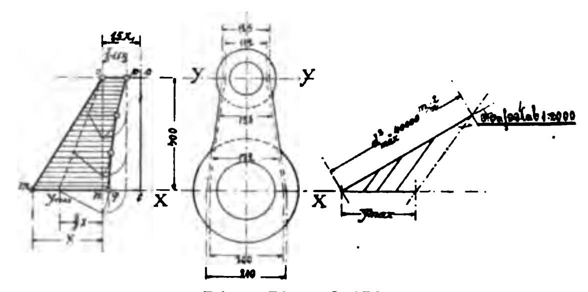


Fig. 172 und 173.

Setzt man für die nachfolgende Kombination von Dreh- und Biegemomenten:

$$P \cdot r_1 = x_1 \cdot H,$$

worin x_1 aus Fig. 169 a abgemessen werden kann, und lautet für rechteckigen Querschnitt die ideelle Biegemomentengleichung:

$$M_i = \frac{3}{8} M_b + \frac{5}{8} \sqrt{M_b^2 + (1{,}5\, M_t)^2},$$

also:

$$y_i \cdot H = \frac{3}{8} y \cdot H + \frac{5}{8} \sqrt{y^2 \cdot H^2 + 1{,}5^2 \cdot x_1^2 \cdot H^2},$$

so folgt:

$$y_i = \frac{3}{8} y + \frac{5}{8} \sqrt{y^2 + 1{,}5^2 \cdot x_1^2}.$$

Bezeichnet man wie früher:

$$\frac{5}{8} \sqrt{y^2 + 1{,}5^2 \cdot x_1^2} = z$$

oder:

$$\sqrt{\left(\frac{5}{8} y\right)^2 + \left(\frac{5}{8} \cdot 1{,}5 \cdot x_1\right)^2} = z,$$

so ist z die Hypothenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Katheten $\frac{5}{8} y$ und $\frac{5}{8} \cdot 1{,}5 \cdot x_1$. Addiert man also zu z das jeweilige $\frac{3}{8} y$, so ist y_i gefunden.

Die ideelle Biegemomentenfläche des Kurbelarmes wird demnach wie folgt erhalten:

Man legt an die Höhe $n o$ des Biegemomentendreiecks $o m n$ in Fig. 172 das Drehmomentenrechteck $n o s t$, bei welchem $n o = r$ die Basis und $o s = 1{,}5 x_1$ die Höhe, zieht die $\frac{5}{8} \cdot 1{,}5 \cdot x_1$-Linie sowie die $\frac{5}{8} z$-Linie und bestimmt in bekannter Weise die Kurve $p \cdot q$. Dann ist $o p q m o$ das gesuchte Diagramm.

Die Horizontalen y_i multipliziert mit der Poldistanz H, also $y_i \cdot H$, dienen dann zur Bestimmung der für jeden Querschnitt verschiedenen Höhen, so dafs das theoretische Profil des Kurbelarmes aufgezeichnet werden kann.

Für den gefährlichen Querschnitt in der Ebene X—X ist:

$$1) \quad y_{i_{max}} \cdot H = \frac{b\, h_{max}^2}{6} \cdot k,$$

und für einen beliebigen Querschnitt zwischen X—X und Y—Y:

$$2) \quad y_{i_x} \cdot H = \frac{b \cdot h_x^2}{6} \cdot k,$$

folglich:

$$\frac{y_{i_{max}}}{y_{i_x}} = \frac{h_{max}^2}{h_x^2},$$

d. h.: Nach Bestimmung von h_{max} aus Gleichung 1 kann mit Hilfe der Fig. 173 jedes gewünschte h_x graphisch ermittelt werden, indem man h_x^2 als vierte Proportionale von $y_{i_{max}}$, y_{i_x} und h_{max}^2 auffafst.

Aus Gleichung 1 folgt:

$$h_{max}^2 = \frac{6 \cdot y_{i_{max}} \cdot H}{b \cdot k}$$

oder für $k = 5$ kg pro mm² und $b = 60$ mm:

$$h_{max}^2 = \frac{6 \cdot 10 \cdot 200 \cdot 50 \cdot 20}{60 \cdot 5} = 40\,000 \text{ mm}^2,$$

also:

$$h_{max} = 200 \text{ mm}.$$

Aus Fig. 172 erhält man für die markierten Querschnitte:

$$h_1 = 112 \text{ mm}, \; h_2 = 138 \text{ mm und } h_3 = 172 \text{ mm}.$$

Die Verbindungslinien der Endpunkte von h_1, h_2 ..... sind Parabeln, die innerhalb des praktischen Tangentenprofiles liegen müssen.

2. Welle mit zwei Stirnkurbeln.

Eine liegende Zwillingsmaschine arbeitet mittels zweier um 90° gegeneinander versetzten Stirnkurbeln auf eine gemeinsame Welle und gibt die ganze Maschinenleistung an eine in der Wellenmitte sitzende Hanfseilscheibe von $G = 10\,000$ kg Gewicht und $R = 1600$ mm Radius wieder ab. Sämtliche Seilenden mögen dabei horizontal von der Scheibe ablaufen. Die Maschine von $D = 400$ mm Zylinderdurchmesser und $s = 600$ mm Hub

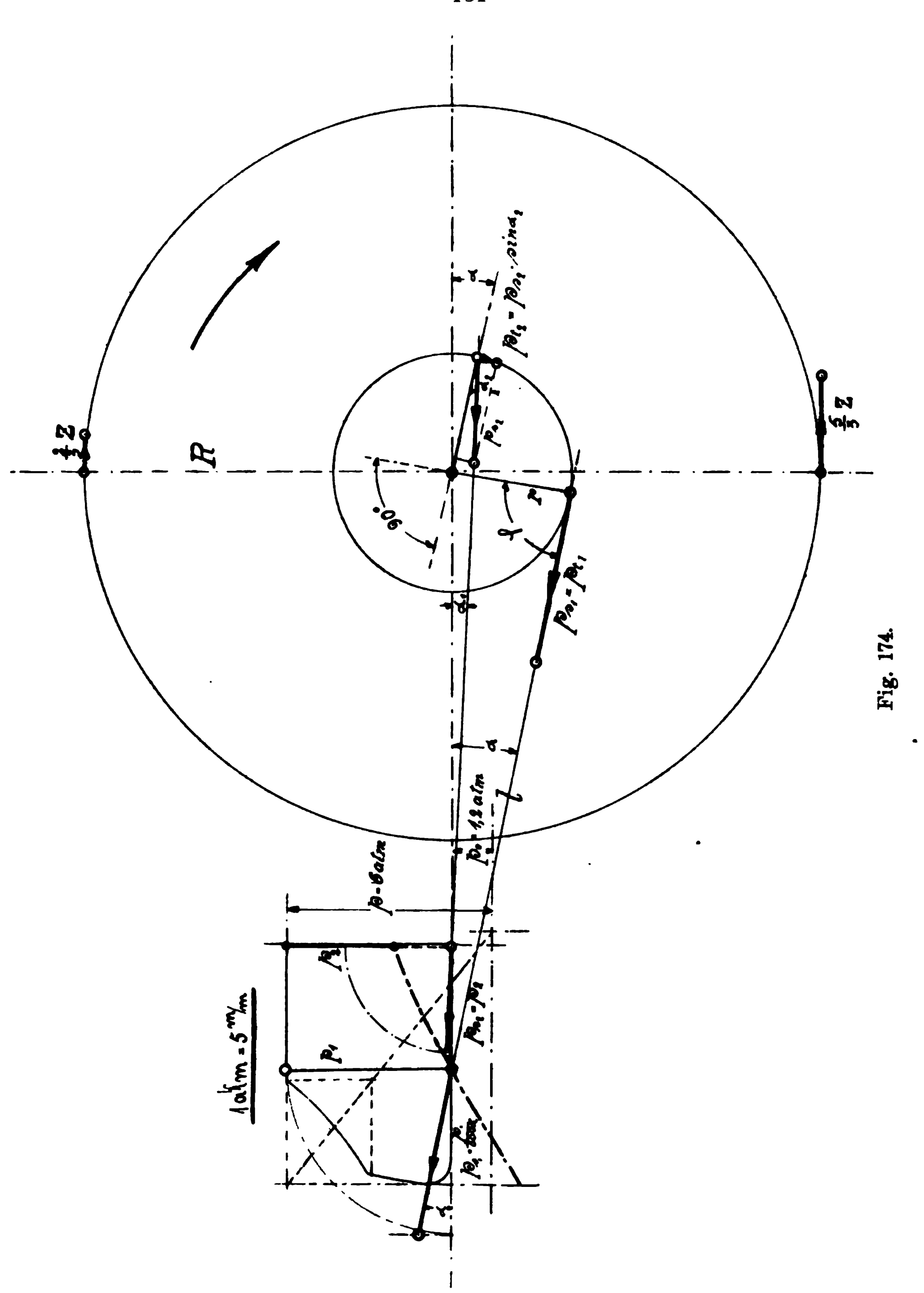


Fig. 174.

macht $n = 150$ Touren pro Minute und arbeitet mit 6 atm Eintrittsspannung und Auspuff in die Atmosphäre. Die Horizontalentfernung der beiden Zylinderachsen resp. der Kurbelzapfenmitten voneinander sei 3200 mm.

Die Stirnansicht der Welle mit Kurbelmechanismus und Seiltrieb (siehe Fig. 174) läfst erkennen, dafs für eine angenommene Maximalfüllung von über 50 % die Wellenbeanspruchung sehr ungünstig ist, wenn die linke Kurbel beim Rücklauf mit der Pleuelstange den Winkel $\varphi = 90^0$ einschliefst und die rechte, um 90^0 nacheilende Kurbel sich ebenfalls in der Rücklaufbewegung befindet. Dann wirken beide Pleuelstangenkräfte, wie Fig. 175 klar veranschaulicht, im gleichen Sinne biegend auf die Welle ein, wobei die an der linken Kurbel wirkende Stangenkraft ein maximales Biege- und Drehmoment erzeugt. Auch von der rechten Kurbel her treten bedeutende Momente auf, so dafs die in Fig. 174 markierten Kurbelstellungen der Wellenberechnung zugrunde gelegt werden sollen.

Eine genauere Untersuchung würde allerdings ergeben, dafs bei einer geringen Weiterdrehung der Kurbeln im Sinne der Pfeilrichtung noch etwas ungünstigere Wellenbeanspruchungen auftreten; jedoch soll der Einfachheit halber hiervon Abstand genommen werden, zumal die Sicherheit der Rechnung trotzdem eine sehr grofse ist.

In Fig. 174 sind alle Drücke pro cm² Kolbenfläche dem mafsstäblich aufgezeichneten Dampfdiagramm entnommen und auf die Kurbelzapfen reduziert. Sie sind den wirklichen Drücken direkt proportional und brauchen nur mit dem Zylinderquerschnitt $F = D^2 \cdot \frac{\pi}{4}$ multipliziert zu werden, um die Gesamtzapfendrücke zu ergeben. Dementsprechend wären die Seilspannungen $\frac{2}{3} Z$ und $\frac{5}{3} Z$ ebenfalls auf 1 cm² Kolbenfläche bezogen zu denken. Nimmt man wieder ein Verhältnis $\frac{r}{l} = \frac{1}{5}$ an, so ergibt $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{5}$ den Winkel $\alpha = 11^0$, und es folgt für Fig. 175 mit Benutzung der Fig. 174:

$$P_{s1} = P_{t1} = F \cdot p_{s1}$$

oder:

$$P_{s1} = P_{t1} = D^2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \frac{p_1}{\cos \alpha} = 40^2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \frac{4{,}8}{\cos 11^0} = \sim 6150 \text{ kg.}$$

Die Horizontalkomponente ist demnach:

$$P_{s1} \cdot \cos \alpha = 6150 \cdot \cos 11^0 = \cong 6030 \text{ kg}$$

und die Vertikalkomponente:

$$P_{s1} \cdot \sin \alpha = 6150 \cdot \sin 11^0 = \sim 1150 \text{ kg.}$$

An der rechten Kurbel bildet P_{s2} mit der Maschinenachse den Winkel α_1, der sich aus:

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin (180 - \alpha)} = \frac{1}{5},$$

also:

$$\sin \alpha_1 = \frac{\sin \alpha}{5} = \frac{\sin 11^0}{5} = 0{,}038$$

zu

$$\alpha_1 = \sim 2^0$$

ermittelt.

Dann folgt zunächst:

$$P_{s2} = F \cdot p_{s2} = \sim F \cdot p_2$$

und da aus dem Diagramm $p_2 = \sim 3$ atm:

$$P_{s2} = 40^2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 3 = \sim 3770 \text{ kg.}$$

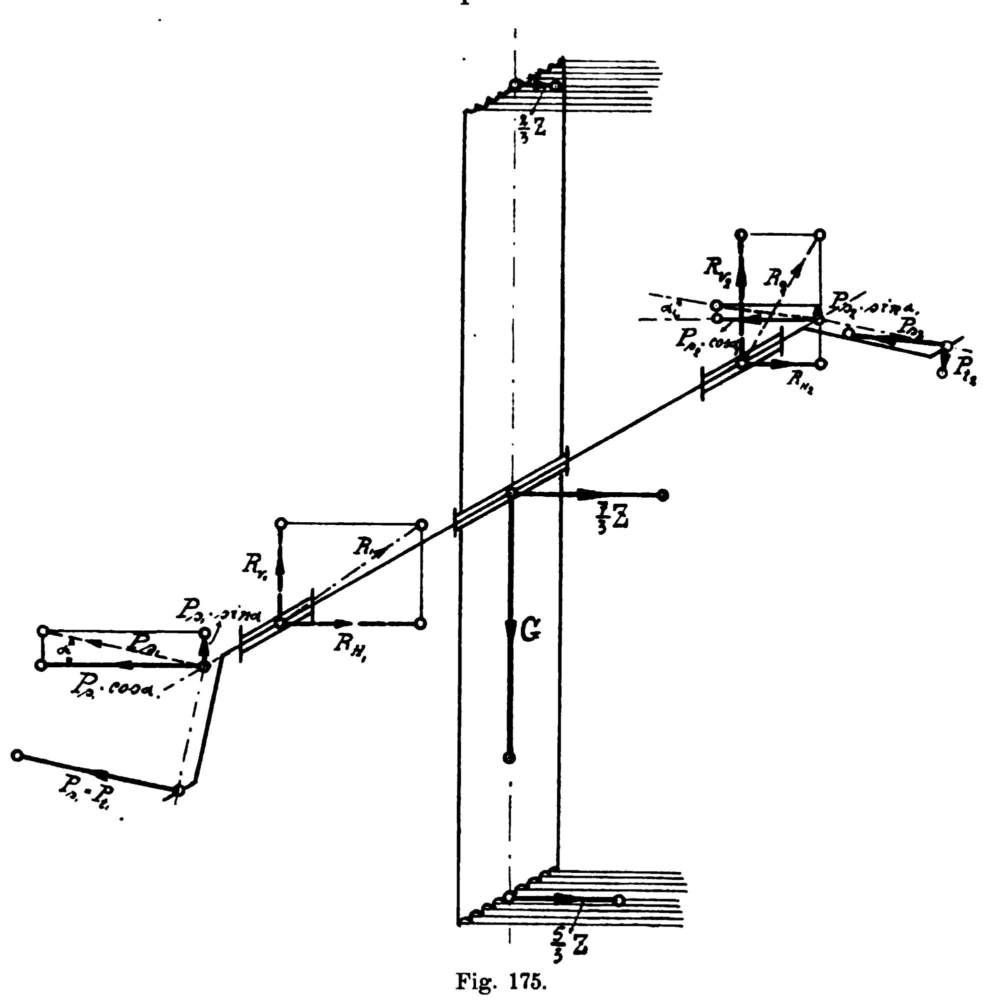


Fig. 175.

Dieses zerlegt sich in die Horizontalkraft:

$$P_{s2} \cdot \cos \alpha_1 = 3770 \cdot \cos 2^0 = \sim 3735 \text{ kg}$$

und die Vertikalkraft:

$$P_{s2} \cdot \sin \alpha_1 = 3770 \cdot \sin 2^0 = \sim 120 \text{ kg.}$$

Die Tangentialkraft P_{t2} erzeugt, analog wie $P_{s1} = P_{t1}$, ein Drehmoment und ergibt sich zu:

$$P_{t2} = P_{s2} \cdot \sin \alpha_2,$$

worin

$$\alpha_2 = 180^0 - [(180 - \alpha) + \alpha_1] = 180 - 180 + 11^0 - 2^0 = 9^0,$$

folglich:

$$P_{t_2} = 3770 \cdot \sin 9^0 = \sim 590 \text{ kg}.$$

Käme, wie beim vorhergehenden Beispiel, ein Riemenantrieb zur Verwendung, so würde man den Riemenzug sicherheitshalber wegen der gröſseren Selbstspannung bestimmen aus:

$$P_{t1} \cdot r + P_{t2} \cdot r = Z \cdot R,$$

mit

$$Z = \frac{r}{R}(P_{t1} + P_{t2}),$$

so daſs:

$$Z = \frac{30}{160}(6150 + 590) = \sim 1280 \text{ kg}.$$

Beim Hanfseiltrieb ist aber die Selbstspannung bedeutend geringer als die normale Umfangskraft Z und beträgt durchschnittlich $\frac{2}{3} Z$ im geführten, also $\frac{2}{3} Z + Z = \frac{5}{3} Z$ im führenden Seiltrum, weshalb hier die Welle nur mit $\frac{2}{3} Z + \frac{5}{3} Z = \frac{7}{3} Z$ auf Biegung beansprucht wird. Die normale, der mittleren Umfangskraft gleichwertige Seilspannung bestimmt sich aus der Arbeitsgleichung:

$$N = \frac{Z \cdot v}{75}$$

zu:

$$Z = \frac{75 \cdot N}{v}.$$

Hierin ist die effektive Maximalleistung der Zwillingsmaschine:

$$N_{max} = D^2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot p_{m_i} \cdot \frac{c}{75} \cdot 2 \cdot \eta.$$

Wird der mittlere indizierte Maximalüberdruck aus dem Diagramm mit $p_{m_i} = 3{,}5$ atm ermittelt, der mechanische Wirkungsgrad der Maschine auf $\eta = 0{,}85$ geschätzt und ist die mittlere Kolbengeschwindigkeit

$$c = \frac{s \cdot n}{30} = \frac{0{,}6 \cdot 1{,}50}{30} = 3 \text{ m},$$

so folgt:

$$N_{max} = 40^2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 3{,}5 \cdot \frac{3}{75} \cdot 2 \cdot 0{,}85 = \sim 300 \text{ PS}.$$

Die Seilgeschwindigkeit ist:

$$v = \frac{R \cdot \pi \cdot n}{30} = \frac{1{,}6 \cdot \pi \cdot 150}{30} = \sim 25 \text{ m},$$

also:

$$Z = \frac{75 \cdot 300}{25} = 900 \text{ kg},$$

und die von den Seilspannungen herrührende horizontale Biegekraft der Welle:

$$\frac{7}{3} Z = \frac{7}{3} \cdot 900 = 2100 \text{ kg}.$$

Für die Konstruktion der Welle kommen also in Frage: die horizontalen Biegekräfte $P_{s1} \cdot \cos \alpha = 6030$ kg, $\frac{7}{3} Z = 2100$ kg und $P_{s2} \cdot \cos \alpha_1 = 3785$ kg, die vertikalen Biegekräfte $P_{s1} \sin \alpha = 1150$ kg, $G = 10\,000$ und $P_{s2} \sin \alpha_1 = 120$ kg und die Drehkräfte $P_{s1} = P_{t1} = 6150$ kg und $P_{t2} = 590$ kg.

Es erübrigt nur noch die Entfernung von Mitte Kurbelzapfen bis Mitte Kurbellager festzulegen. Diese wird man natürlich bei beiden Maschinenhälften gleich machen, so dafs zur Bestimmung von $X = \frac{l_1}{2} + b + a + \frac{L_1}{2}$ (siehe Fig. 167) die linke Kurbel mafsgebend ist. Für $k = 5$ kg pro mm² und $p = 0{,}5$ kg pro mm² folgt, wie im vorigen Beispiel, für den Kurbelzapfen:

$$\frac{l_1}{d_1} = 1{,}4, \quad d_1 = 95 \text{ mm und } l_1 = 134 \text{ mm}.$$

Der Zapfenanlauf sei ebenfalls $b = 3$ mm.

Die Kurbellagerlänge wird ein Maximum bei Schmiedeisen auf Rotgufs für:

$$L > \frac{R_1 n}{4000} = \frac{1{,}2\, P_{s1} \cdot n}{4000} = \frac{1{,}2 \cdot 6150 \cdot 150}{4000} = 277 \text{ mm}.$$

Gewählt sei $L_1 = 300$ mm. Schätzt man noch die Kurbelnabenlänge auf $a = 150$ mm, so ist:

$$X = \frac{l_1}{2} + b + a + \frac{L_1}{2} = 67 + 3 + 150 + 150 = 370 \text{ mm}.$$

Mit Hilfe der Fig. 176 bis 179 ist nun die Bestimmung des theoretischen Wellenprofiles vorzunehmen. Die praktische Form der Welle wird man dann wegen der symmetrischen Belastungsebenen und der einfacheren Bearbeitung natürlich so ausführen, dafs von der vertikalen Mittelebene aus beide Wellenteile genau gleich werden. Hierbei ist im vorliegenden Falle der ungünstiger beanspruchte linke Wellenschenkel mafsgebend für die Ausführungsform der Welle. Die in Fig. 178 der Deutlichkeit halber um 180° versetzt gedachte rechte Kurbel bekommt ebenfalls dieselben Abmessungen wie die linke. Für letztere bietet die Berechnung nichts Neues, denn die Beanspruchung des Kurbelarmes auf Biegung und Verdrehung durch die Tangentialkraft $P_{t1} = P_{s1}$ ist genau so wie die bei der Kurbel im vorigen Beispiel durch P, und da aufserdem bei gleichem Kurbelradius r auch zufällig $P_{t1} = P$ geworden ist, so müssen sich die ermittelten Abmessungen in beiden Fällen decken. Verschieden wird nur die Nabenlänge, die hier $a = 150$ mm angenommen ist.

Kommt unter sonst gleichen Verhältnissen statt der Zwillingsmaschine eine Verbundmaschine mit 90° Kurbelversetzung zur Verwendung, wobei der Hochdruckzylinder auf die linke, der Niederdruckzylinder auf die rechte Kurbel einwirkt, so wird bei einer Vergröfserung der Füllung über die normale hinaus die Arbeit im kleinen Zylinder nach Fig. 181 allmählich kleiner werden und Mehrleistung der Maschine bis zum festgesetzten Maximum dadurch erreicht, dafs bei konstantem Füllungsverhältnis des grofsen Zylinders mit der Receiverspannung auch die Eintrittsspannung des Niederdruckzylinders wächst. Bei der Maximalleistung der Maschine verschieben sich deshalb die Kolbenkräfte zuungunsten des grofsen Zylinders und werden hier bedeutend gröfser als im kleinen Zylinder. Infolgedessen

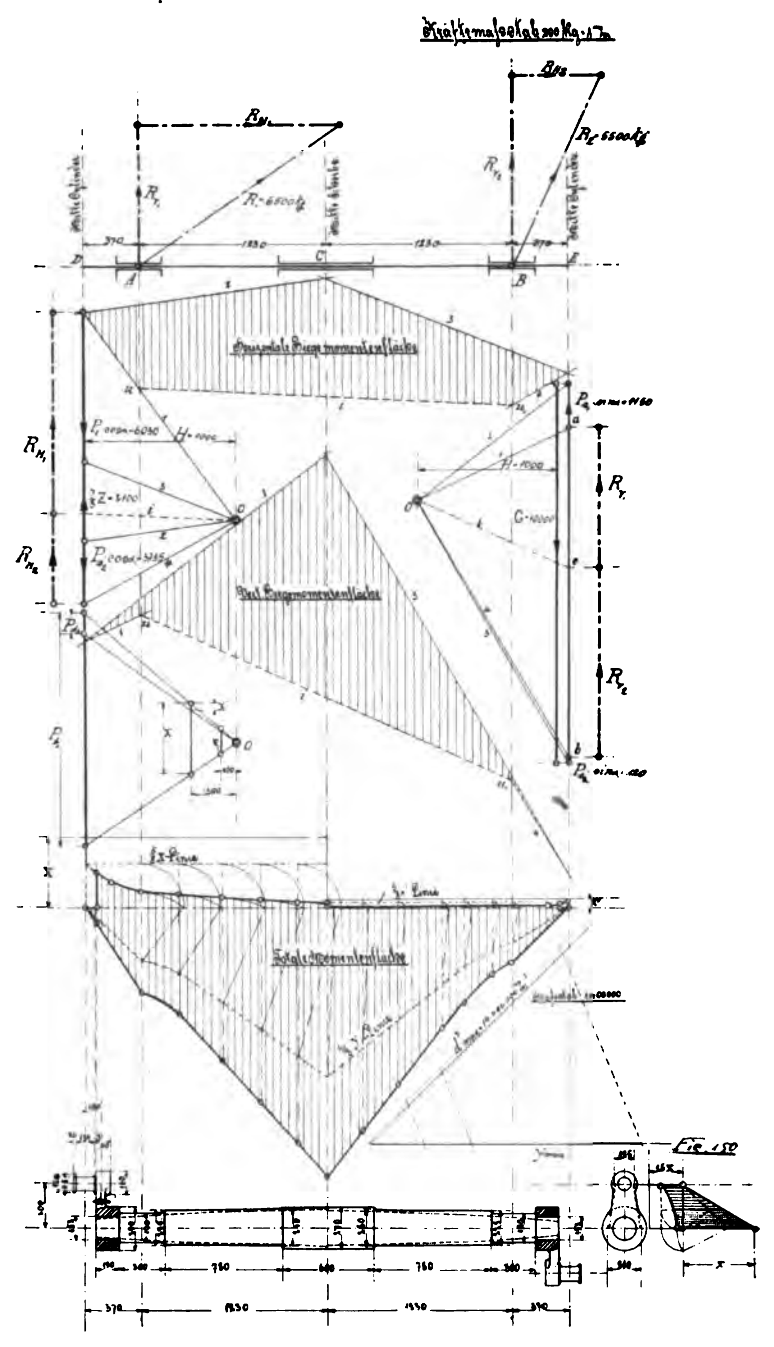


Fig. 176, 177, 178, 179 und 180.

empfiehlt es sich bei genaueren Untersuchungen, die totalen Momentenflächen für mehrere Kurbelstellungen zu entwerfen und erst nach Vergleich derselben miteinander die Aufzeichnung des theoretischen Wellenprofiles vorzunehmen. Aufser den in Fig. 174 gezeichneten Kurbelstellungen kämen dann vor allen diejenigen in Frage, bei denen die rechte Kurbel bei der Rücklaufbewegung normal zur Pleuelstange steht und die linke beim Hinlauf um α^0 die Totlage überlaufen hat, oder bei denen beide Kurbeln in der Hinlaufbewegung begriffen sind und die rechte einen Winkel von 90^0 mit der Pleuelstange einschliefst. Eilt die rechte Niederdruckkurbel der linken vor, so werden jedenfalls die in Fig. 174 markierten Stellungen zu den ungünstigsten gehören.

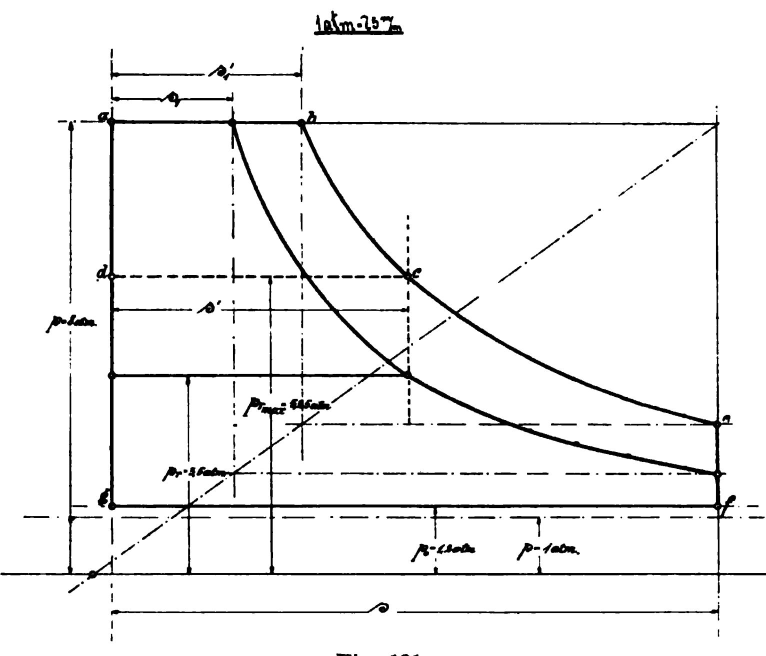


Fig. 181.

Für die Bestimmung der Kurbeldrücke, die mit Rücksicht auf die verschiedenen Kolbenquerschnitte sonst genau wie im durchgeführten Beispiel ermittelt werden, empfiehlt sich immer die Aufzeichnung des theoretischen Arbeitsdiagrammes. Dasselbe ist in Fig. 181 für eine Auspuffmaschine von $p = 8$ atm Eintrittsspannung dargestellt. Der auf den Niederdruckzylinder reduzierten Normalfüllung von $\frac{s_1}{s} = 0,2$ entspricht ein Volumenverhältnis der Zylinder von $\frac{s'}{s} = 0,48$, so dafs im kleinen Zylinder eine Normalfüllung von $\frac{s_1}{s'} = \frac{0,2}{0,48} = 0,415$ gegeben werden mufs, zu welcher die normale Receiverspannung $p_r = \sim 3,5$ atm gehört. Bei der gebräuchlichen Annahme, für die Maximalleistung der Maschine eine Füllungsvergröfserung

von ca. 25 % im kleinen Zylinder zuzulassen, wird dann die Maximalfüllung in diesem $\frac{s_1'}{s} = \sim 0,65$, und es steigt demgemäfs die Receiverspannung von $p_r = 3,5$ atm. auf $p_{r_{max}} = 5,25$ atm.

Die Maximalkurbeldrücke sind daher mittels der Diagramme *abcd* und *dcefgd* für die erwähnten ungünstigsten Kurbelstellungen auszurechnen.

Das gleiche gilt selbstverständlich bei einer Receiver-Woolf-Maschine mit einer Kurbelversetzung von 180°. Auch hier wird man nach kurzer Überlegung sehr leicht die ungünstigsten Kurbelstellungen herausfinden können.

3. Einfach gekröpfte Kurbelwelle.

Für eine im Viertakt arbeitende Gasmaschine von $D = 400$ mm Zylinderdurchmesser und $s = 560$ mm Hub, die $n = 200$ Touren pro Minute macht und zum Betriebe einer Dynamomaschine dienen soll, ist die gekröpfte Kurbelwelle zu berechnen. Die erforderlichen Schwungmassen von 6000 kg Gewicht sind in zwei Schwungrädern von je 2400 mm Durchmesser untergebracht, welche aufserhalb der Kurbellager fliegend angeordnet sind. Das eine Schwungrad diene gleichzeitig als Riemenscheibe.

Die Maschine soll mit $p_c = 8$ atm Kompressionsendspannung arbeiten, so dafs während der ersten Betriebszeit bei möglichst kühl angesaugtem Gasgemenge eine maximale Verpuffungsspannung von ca. 26 atm erreicht werden kann. Demgemäfs läfst sich das in Fig. 182 dargestellte mafsstäblich gezeichnete Überdruckdiagramm zur Bestimmung der Kurbeldrücke verwenden.

Abweichend vom Dampfmaschinenbetrieb tritt hier nicht in der Normallage der Kurbel zur Pleuelstange die ungünstigste Wellenbeanspruchung auf, sondern schon in dem Augenblick, in welchem im Zylinder die Verpuffungsendspannung erreicht ist. Der Kolben hat dann durchschnittlich 3 % seines Hubes zurückgelegt, und es läfst die Fig. 182 deutlich erkennen, dafs bei der zugehörigen Stellung des Kurbelmechanismus am Kurbelzapfen bedeutend gröfsere Biege- und Drehkräfte auftreten als in der Normallage der Kurbel.

Man findet aus der Figur die auf den cm² Kolbenfläche bezogenen Drücke mit $p_s = \sim p = 23$ atm und $p_t = \sim 10,4$ atm. Der für die Wellenberechnung mafsgebende wirkliche Kurbelzapfendruck bestimmt sich dann zu:

$$P_s = F \cdot p_s = 40^2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 23 = \sim 28\,900 \text{ kg},$$

wobei die zur Kurbel senkrecht stehende, Arbeit leistende Komponente die Gröfse:

$$P_t = 40^2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 10,4 = \sim 13\,100 \text{ kg}$$

annimmt.

Diese Kräfte sind in die mafsstäblich aufgezeichnete Figur 183, die den Kurbelmechanismus mit Riementrieb darstellt, eingetragen und ebenso die Riemenspannungen Z und $2\,Z$.

Die Berechnung von Z erfolge aus der Arbeitsgleichung:

$$N_{max} = \frac{Z \cdot v}{75}.$$

In dieser ist:

$$N_{max} = F \cdot p_{m_i} \frac{c}{75 \cdot 4} \cdot \eta,$$

worin $p_{m_i} = \sim 6$ atm der mittlere Überdruck bei der Maximalleistung der

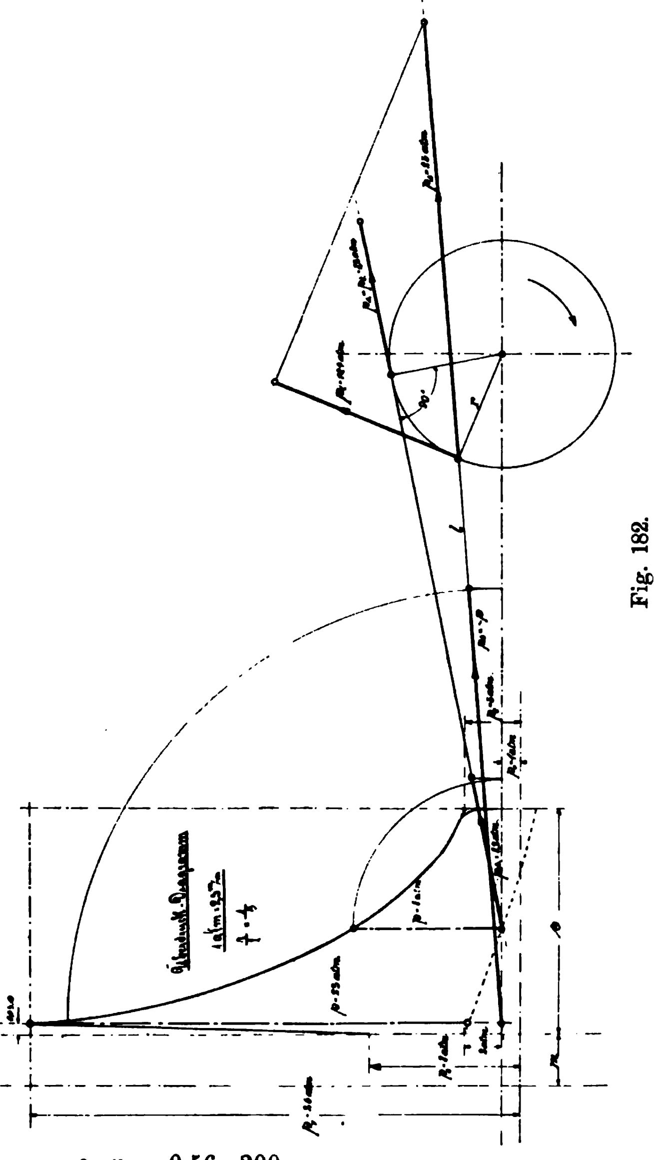


Fig. 182.

Maschine, $c = \frac{s \cdot n}{30} = \frac{0{,}56 \cdot 200}{30} = 3{,}73$ m die mittlere Kolbengeschwindigkeit und $\eta = 0{,}85$ der mechanische Wirkungsgrad, folglich:

$$N_{max} = 40^2 \frac{\pi}{4} \cdot 6 \cdot \frac{3{,}73}{75 \cdot 4} \cdot 0{,}85 = \sim 80 \text{ PS},$$

also, da

$$v = \frac{R \cdot \pi \cdot n}{30} = \frac{1{,}2 \cdot \pi \cdot 200}{30} = \sim 25 \text{ m},$$

$$Z = \frac{75 \cdot 80}{25} = 240 \text{ kg}.$$

Bei Berücksichtigung der Selbstspannung mit ca. 30 % Zuschlag wird:

$$Z = 1{,}3 \cdot 240 = \sim 320 \text{ kg}.$$

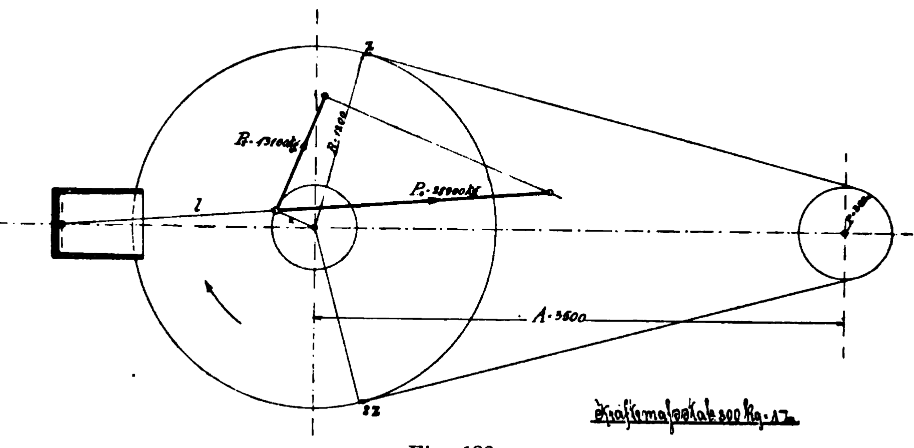


Fig. 183.

Bestimmt man nun nach Fig. 184 mittelst der Kräftedreieckkonstruktion die von den Riemenzügen herrührende Biegekraft der Welle, nämlich $Z_R = 935$ kg und deren Vertikal- und Horizontalkomponente $Z_v = 80$ kg und $Z_H = 930$ kg, so ergeben diese im Vergleich mit den Kurbelkräften und den Schwungradgewichten so kleine Werte, dafs für die Wellenberechnung der Einflufs der Riemenzüge ganz aufser acht

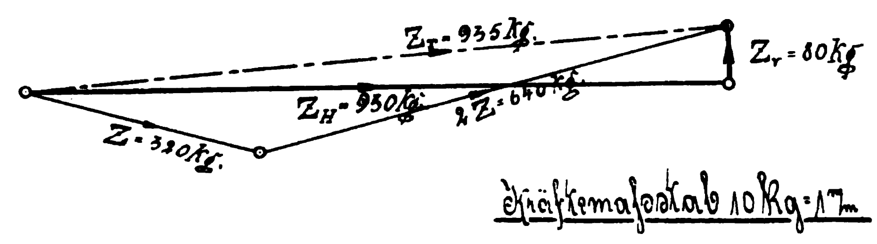


Fig. 184.

gelassen werden kann. Hiermit erhöht sich im vorliegenden Falle gleichzeitig die Sicherheit der Rechnung etwas, da die gröfsere Komponente $Z_H = 930$ kg im entgegengesetzten Sinne biegend auf die Welle einwirkt als $K = 28\,500$ kg (Fig. 185) und dementsprechend eine Verminderung der von K, R_{H1} und R_{H2} erzeugten Biegemomente anstrebt.

Nach Fig. 185 ergibt sich deshalb eine Wellenbeanspruchung durch die vertikalen Kräfte $G_1 = 3000$ kg, $V = 2500$ kg und $G_2 = 3000$ kg, die Horizontalkraft $K = 28\,500$ kg und die Drehkraft $P_t = 13\,100$ kg.

Die Hauptabmessungen der Welle und namentlich die Entfernung von Mitte zu Mitte Kurbellager kann man an Hand der Skizze (Fig. 186) ziemlich zuverlässig in folgender Weise bestimmen: Läſst man mit Rücksicht darauf, daſs der gröſste Pleuelstangendruck $P_s = 28\,900$ kg während zweier Kurbeldrehungen nur einmal vorkommt, für den Kurbelzapfen einen spez.

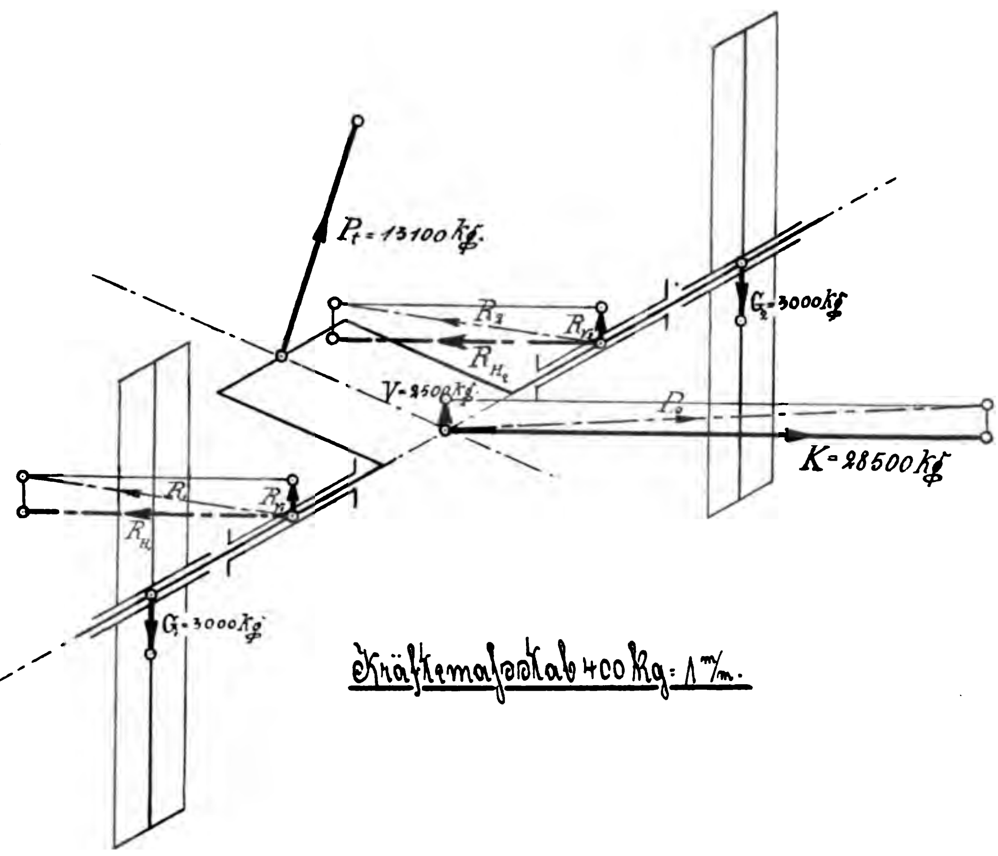


Fig. 185.

Flächendruck von $p' = 0{,}6$ kg pro mm² zu und nimmt $l = d$ an, welches Maſs eventuell später noch etwas verkleinert werden darf, so ergibt sich aus:

$$P_s = l \cdot d \cdot p',$$

$$l = \sqrt{\frac{P_s}{p'}} = \sqrt{\frac{28\,900}{0{,}6}} = \backsim 220 \text{ mm.}$$

Wählt man den Zapfenanlauf $a = 10$ mm, so wird:

$$l_1 = l + 20 = 240 \text{ mm.}$$

Die Breite des Kurbelarmes sei geschätzt auf $\frac{l}{2} = 110$ mm und der Wellenanlauf für die Lager auf $c = 10$ mm.

Die Länge des Kurbellagers folgt aus:

$$L_1 \geqq \frac{R \cdot n}{4000}.$$

Bei der symmetrischen Anordnung der Lager ergibt sich ein Maximalstützdruck $R_{max} = \frac{P_s}{2} = 14\,450$ kg.

Da dieser nur während des Arbeitshubes und infolge der Viertaktwirkung der Maschine verhältnismäfsig selten auftritt, alle nachfolgenden Lagerdrücke dagegen ganz bedeutend kleiner sind und aufserdem verschiedene Richtungen besitzen, so wird man ein Heifslaufen der Lagerschalen noch sicher verhüten, wenn für die Berechnung von L_1 ein mittlerer Druck von $R = \frac{R_{max}}{2} = 7225$ kg zugrunde gelegt wird. Dann folgt:

$$L \geqq \frac{7225 \cdot 200}{4000} \geqq 361 \text{ mm}.$$

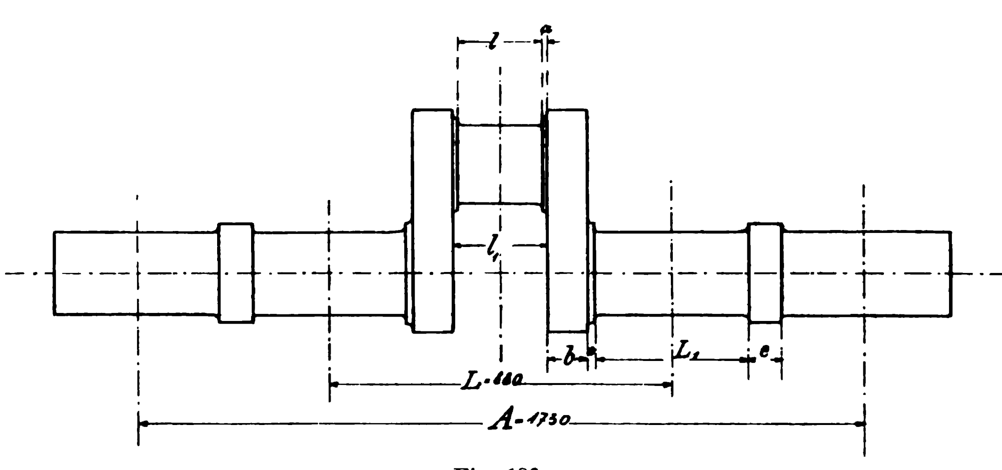


Fig. 186.

Gewählt sei $L_1 = 400$ mm.

Die Entfernung von Mitte zu Mitte Kurbellager ist jetzt:

$$L = l + 2\,a + 2\,b + 2\,c + 2\,\frac{L_1}{2} = 220 + 20 + 220 + 20 + 400 = 880 \text{ mm}.$$

Aufserhalb der Lager sind zum Links- oder Rechtsaufkeilen des Antriebsrades der Steuerwelle $e = 75$ mm lange Ansätze vorgesehen, hinter welchen symmetrisch zur Maschinenachse die Schwungräder sitzen. Die Mittelentfernung der letzteren voneinander sei dann $A = 1730$ mm.

Die graphische Berechnung der Kurbelwelle kann jetzt in der Weise durchgeführt werden, dafs man zunächst nach Fig. 187 die Einzelbiegemomentenflächen entwirft und die infolge der symmetrischen Kräfteverteilung unter sich gleich grofsen Horizontal- und Vertikallagerreaktionen bestimmt. Hierbei findet man $R_{H_1} = R_{H_2} = 14\,250$ kg, $R_{r_1} = R_{r_2} = 1750$ kg und $R_1 = R_2 = 14\,450$ kg. Die Kombination der Einzelmomentenflächen ergibt die in Fig. 188 dargestellte resultierende Fläche $D_1\,C_1\,E_1$. Das Torsionsmoment $P_t \cdot r$ der Welle werde von der Mittelebene F des linken

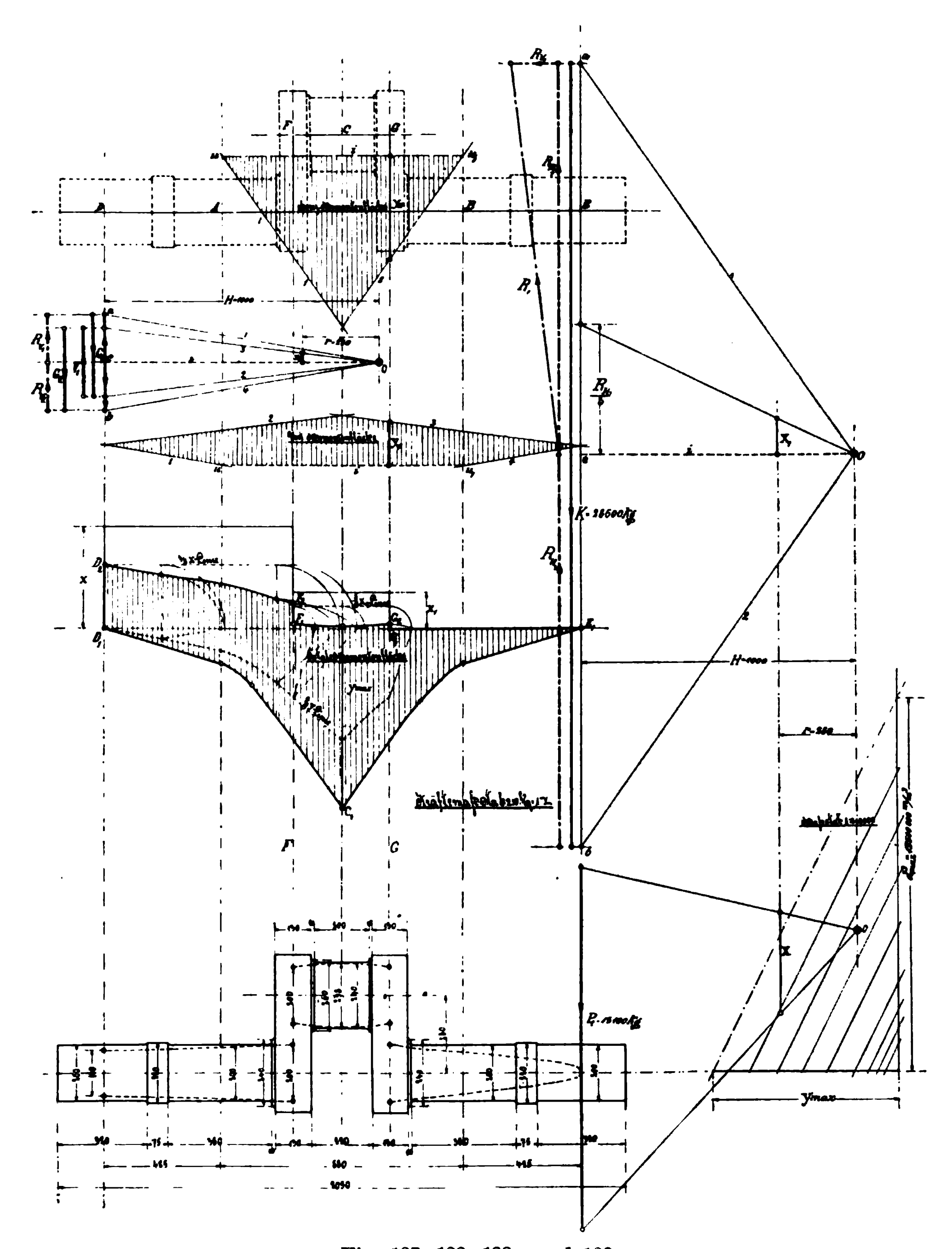


Fig. 187, 188, 188a und 189.

Kurbelarmes bis zur Scheibenmittelebene D in konstanter Gröfse weiter geleitet und sei durch $x \cdot H$ ersetzt, wobei x aus Fig. 188a zu entnehmen ist. In der gezeichneten Kurbelstellung wird der Kurbelzapfen durch verhältnismäfsig kleine Momente der Vertikalkräfte R_{r2} und G_2 oder R_{r1} und G_1 auch noch auf Verdrehung beansprucht; jedoch ist an Hand von Fig. 182 und 185 leicht einzusehen, dafs für den Zapfen ein maximales Drehmoment auftritt, wenn die Kurbel in der oberen Vertikallage steht. In diesem Falle ist die Horizontalreaktion die am Kurbelradius r wirkende, verdrehende Kraft, deren Gröfse ungefähr den dritten Teil der in Fig. 187 ermittelten Reaktion beträgt. Das Maximaldrehmoment des Zapfens beträgt demnach:

$$\frac{R_{H1}}{3} \cdot r = x_1 H,$$

wobei x_1 aus dem Horizontalkräfteplan abzugreifen ist.

Nimmt man nun sicherheitshalber an, dafs dieses Drehmoment gleichzeitig in der Kurbelstellung vorhanden ist, in welcher die ungünstigsten Biegemomente auftreten (Fig. 185), so ergibt die Vereinigung der Drehmomentenrechtecke von Welle und Zapfen mit der resultierenden Biegemomentenfläche die in Fig. 188 dargestellte totale — zwischen den Ebenen D und G ideelle — Momentenfläche $D_1\, C_1\, E_1\, G_1\, G_2\, F_1\, F_2\, D_2\, D_1$, welche zur Dimensionierung der Kurbelwelle dient.

Man wird nun vorläufig erst das theoretische Profil von Kurbelzapfen und Welle für eine zulässige Beanspruchung von $k = 5$ kg pro mm² nach Fig. 189 entwerfen, wobei sich in der Zapfenmitte der gröfste Durchmesser zu $d = 238$ mm ergibt, und dann untersuchen, ob die angenommene Armbreite $b = 110$ mm beibehalten werden kann. Die Armbreite richtet sich nach dem Durchmesser des Zapfenanlaufes a und sei $h = 290$ mm. Läfst man die Annahme zu, dafs die der Kurbelstellung in Fig. 185 entsprechenden Lagerreaktionen in gleicher Gröfse auch in der linken Totlage auftreten, indem man sich schon hier infolge Vorzündung die Verpuffungsendspannung erreicht denkt, so wird die Beanspruchung des Kurbelarmes, wie Fig. 190 klar veranschaulicht, am ungünstigsten. Der in der Kurbelzapfenachse eingespannt gedachte Arm wird dann durch die sehr grofse Horizontalkraft R_{H2} über die flache Seite mit dem für alle Querschnitte konstanten Moment:

$$M_{b1} = R_{H2} \cdot 265 \text{ mm kg}$$

gebogen und aufserdem noch durch das konstante Drehmoment:

$$M_t = G_2 \cdot 690 - R_{r2} \cdot 265$$

und das für alle Querschnitte verschieden grofse Biegemoment:

$$M_{b2} = (G_2 - R_{r2})\, x$$

beansprucht, wobei M_{b2} ein Maximum wird für $x = r$.

Vereinigt man das von

$$M_{b1} = R_{H1} \cdot 265 = y_H \cdot H$$

(Fig. 187) erzeugte Biegemomentenrechteck $e\,f\,g\,h$ mit dem von

$$M_{b2} = (G_2 - R_{r2}) \cdot r$$

herrührenden Momentendreieck, dessen Spitze in der Wellenachse liegt und in Fig. 191 mit e zusammenfallen möge, so entsteht als resultierende Biegemomentenfläche ein Trapez von der Höhe r mit den Parallelseiten $e \cdot h = y_H$ und $g\, l = \sqrt{y_H^2 + x_2^2}$.

Hierin ist $fz = x_2$ aus dem Vertikalkräfteplan bestimmt (Fig. 187), denn es gilt die Gleichung:

$$(G_2 - R_{r2})\, r = x_2 \cdot H.$$

Das Drehmoment ist gleich dem Vertikalbiegemoment der Welle, also

$$G_2 \cdot 690 - R_{v2} \cdot 265 = y_v \cdot H \text{ (Fig. 187)},$$

so dafs das Drehmomentenrechteck *hikg* die Höhe $1{,}5 \cdot y_v$ und die Basis r besitzt. Die bekannte Vereinigung von Biege- und Drehmomentenfläche ergibt dann *enmle* als ideelle Momentenfläche des Kurbelarmes.

Der letztere erhält natürlich rechteckigen Querschnitt und erfordert eine Nachrechnung von b für den gefährlichen Querschnitt in der Zapfenebene. Erinnert man sich noch, dafs die weitaus gröfste Kraft R_{H2} biegend über die flache Armseite wirkt, so wird man sicherheitshalber die Armbreite b als Höhe auffassen, und es gilt:

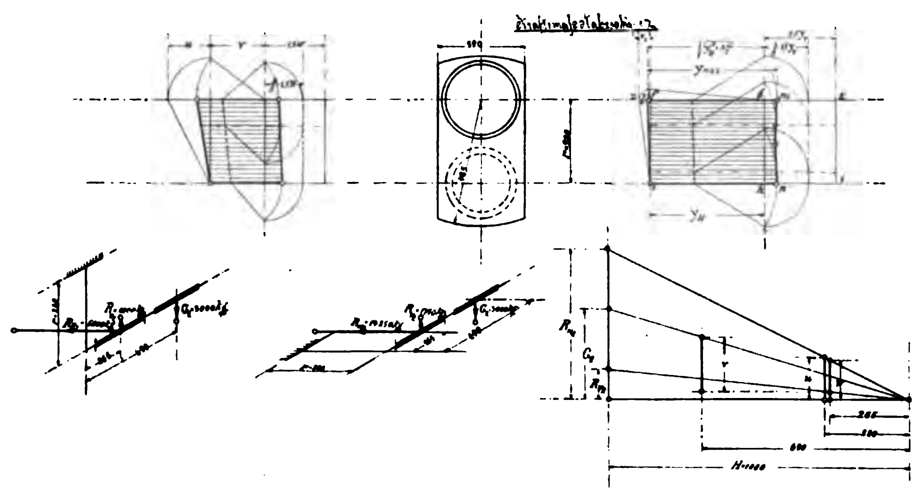


Fig. 190, 191, 192, 193 und 194.

$$y_{i_{max}} \cdot H = \frac{h \cdot b^2 \cdot k}{6},$$

also:

$$b = \sqrt{\frac{6 \cdot y_{i_{max}} \cdot H}{h \cdot k}}$$

oder für $k = 6$ kg pro mm²:

$$b = \sqrt{\frac{6 \cdot 17{,}2 \cdot 250 \cdot 40 \cdot 25}{290 \cdot 6}} = \sim 130 \text{ mm}.$$

Dieser Wert ist für die Ausführung beizubehalten, und zwar nicht nur bei der rechten, sondern auch bei der linken Kurbel, denn beide werden infolge der symmetrischen Wellenbelastung gleich beansprucht. Wäre letzteres nicht der Fall gewesen, was ja sehr oft zutrifft, so ist die Momentenfläche des linken Kurbelarmes ebenfalls aufzuzeichnen und dann das in beiden Diagrammen vorkommende $y_{i_{max}}$ der Berechnung der gleich stark auszuführenden Arme zugrunde zu legen.

Jetzt kann auch das praktische Wellenprofil mit Rücksicht auf die zulässige Flächenpressung und die nötige Wärmeabfuhr der Wellenlager

nach Fig. 189 festgelegt werden, in welcher zwecks möglichst einfacher und billiger Bearbeitung die Wellendurchmesser ziemlich konstant gehalten sind. Der Kurbelzapfen erhält die Abmessung $l = 200$ mm und $d = 240$ mm, ferner das Wellenlager $L_1 = 380$ mm und $D_1 = 200$ mm, so daſs bei den gröſsten Pleuelstangenkräften ein spezifischer Flächendruck von:

$$p = \frac{28\,900}{200 \cdot 240} = 0{,}60 \text{ kg pro mm}^2 \text{ im Zapfen}$$

und

$$p = \frac{14\,450}{380 \cdot 200} = 0{,}20 \text{ kg pro mm}^2 \text{ im Lager}$$

auftritt.

Da bei Dampfmaschinenantrieb bei gröſseren Füllungen die maximalen Kolbenkräfte in der Nähe der Vertikallage der Kurbel auftreten und in dieser meist die ungünstigsten Armbeanspruchungen erzeugen, so soll noch an Hand der Fig. 192 bis 194 gezeigt werden, wie in solchem Falle die entsprechende Momentenfläche des Armes zu entwerfen ist. Hierbei sind die Lagerreaktionen R_{H2} und R_{v2} mittels des Arbeitsdiagrammes Fig. 182 bestimmt worden, um gleichzeitig einen Vergleich der beiden ideellen Momentenflächen Fig. 194 und Fig. 191 vor Augen zu haben.

In der Vertikallage der Kurbel biegt R_{H2} über die hohe Armseite mit dem veränderlichen Moment $R_{H2} \cdot x$, welches in der Zapfenebene für $x = r$ ein Maximum wird. Es entsteht deshalb als Momentenfläche nach Fig. 194 ein rechtwinkliges Dreieck von der Basis r und der Höhe u, wobei u aus:

$$R_{H2} \cdot r = u \cdot H$$

mittels Fig. 193 gefunden wird.

An die Basis r des Momentendreiecks legt sich ein Biegemomentenrechteck von der Höhe v, welches durch die Wirkung des für alle Armquerschnitte konstanten Biegemomentes

$$G_2 \cdot 690 - R_{v2} \cdot 265 = v \cdot H$$

entsteht.

Schlieſslich wird der Arm auch noch durch die Horizontalreaktion R_{H2} mit

$$R_{H2} \cdot 265 = w \cdot H$$

auf Verdrehung beansprucht, so daſs nun die Kombination der beiden um 90° zueinander geneigten Biegemomentenflächen mit dem Drehmomentenrechteck vorgenommen werden kann.

in der Richtung dieser Achsen gegriffenen Maße, während sie im Verhältnis 1 : 0,8165 = ungefähr 11 : 9 verkürzt werden, ihr richtiges Größenverhältnis zueinander behalten, gewährt den Vorteil, daß man alle in den drei Hauptrichtungen zu messenden Längen unmittelbar nur nach einem Maße aus der Zeichnung entnehmen kann, so daß Maße nicht eingeschrieben zu werden brauchen.